Analysis 1

Sei $\varepsilon < 0$.

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teweilse **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Logik

1.1.1 logische Zeichen

- $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B; A impliziert B; wenn A, dann B)
- $A \Leftrightarrow B$ (aus A folgt B und aus B folgt A; A und B sind äquivalent/-gleichwertig; A gilt genau dann, wenn b gilt)
- $A :\Leftrightarrow B$ (A wird definiert durch B)
- $\exists n \in \mathbb{N} : n = \sqrt{2}$ bzw. $\exists_{n \in \mathbb{N}} n = \sqrt{2}$ (es existiert ein n aus $\mathbb{N}$, für das gilt: $n = \sqrt{2}$)
- $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$ bzw. $\forall_{n \in \mathbb{N}} n > 0$ (für jedes n aus $\mathbb{N}$ gilt: $n > 0$)

1.1.2 logische Regeln

- $\neg(\exists a : b) \Leftrightarrow \forall a : \neg b$
- $\neg(\forall a : b) \Leftrightarrow \exists a : \neg b$

1.2 Mengen

1.2.1 Grundlagen

- Menge, Teilmenge, Element, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, leere/nichtleere Mengen, endliche/unendliche Mengen, Betrag/Mächtigkeit, disjunkte Teilmengen (keine gemeinsamen Elemente)
- *Endlichkeit*: M endlich $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : (\exists \alpha : \{1, 2, ..., n\} \mapsto M$ bijektiv).
- *Potenzmenge*: Menge aller Teilmengen
  - $\mathcal{P}(A) := \{U | U \subseteq M\}$
  - $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
  - $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

1.2.2 Bildung neuer Mengen

- Sei I eine *Indexmenge* und seien M_i, $i \in I$, Mengen
- *Vereinigung:* $\bigcup\limits_{i \in I} := \{x | x \in M_i \text{ für ein } i \in I\} = M_1 \cup M_2 \cup \dots$
- *Durchschnitt:* $\bigcap\limits_{i \in I} := \{x | x \in M_i \text{ für alle } i \in I\} = M_1 \cap M_2 \cap \dots$
- *kartes. Produkt:* $\bigotimes\limits_{i \in I} := \{(x_1, \dots, x_r) | x_i \in M_i, i \in I\} = M_1 \times M_2 \times \dots$
  (Für endliche Mengen $A_1, ..., A_2$ gilt: $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$)
- *Differenz:* $M \setminus N := x | x \in M \wedge x \notin N$, eine Differenzmenge $M \setminus N$ heißt *Komplement* von N in M, falls $N \subseteq M$.
- Regeln von *de Morgan*:
  - Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$.
  - kurzfristige Sondernotation: $\overline{N} := M \setminus N$
  - $M \setminus \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} N = \bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} (M \setminus N) \Leftrightarrow \overline{\bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} N} = \bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} \overline{N}$
  - $M \setminus \bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} N = \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} (M \setminus N) \Leftrightarrow \overline{\bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} N} = \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} \overline{N}$
  - $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

1.2.3 Partitionen/Klasseneinteilungen

Eine *Partition* (Klasseneinteilung) ist eine vollständige Aufteilung einer Menge in Teilmengen ohne Schnittmengen. Wenn für $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(M)$ gilt: $\bigcup\limits_{N \in \mathcal{N}} N = M \wedge \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} N = \emptyset$, so ist $\mathcal{N}$ eine Partition von M.

1.2.4 Permutation

Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Die Menge aller n-Tupel $(a_1, ..., a_n)$ mit $a_i \in A$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ (paarweise verschieden) hat genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... 3 \cdot 2 \cdot 1$ Elemente, also $\prod\limits_{i=0}^{n-1} (n-i) = \prod\limits_{x=1}^{n} x = n!$ Elemente.

1.2.5 Menge von Tupeln

Sei A eine Menge mit $|A| = n$. Sei $1 \leq m \leq n$. Die Menge aller m-Tupel $(a_1, ..., a_m)$ mit $a_i \in A$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ (paarweise verschieden) hat genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ...(n-(m-1))$ Elemente, also $= \prod_{x=n}^{n-(m-1))} x = \frac{n!}{(n-m)!}$ Elemente.

1.3 Relationen

Sei M eine Menge. Sei σ eine Relation auf M. Dann ist $\sigma \in M \times M$. Seien $x, y, z \in M$.

- Eigenschaften von Relationen
  - Reflexivität: $x\sigma x$
  - Symmetrie: $x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma x$
  - Anti-Symmetrie: $x\sigma y\sigma x \Leftrightarrow x = y$
  - Transitivität: $x\sigma y\sigma z \Leftrightarrow x\sigma z$

RSAT Die *Gleichheit* ist eine Relation, die alle Eigenschaften erfüllt.

RST Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt *Äquivalenzrelation* (z.B. $\backsim$).

RAT Eine Relation, die reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv ist, heißt *Ordnungsrelation* (z.B. $\leq, \geq, \subseteq$)

T Relationen können rein transitiv sein (z.B. $<, >, \subset$).

1.3.1 Eigenschaft von Äquivalenzrelationen

Definition einer Relation: $x \backsim y :\Leftrightarrow (x, y) \in A$ mit $A \subseteq M \times M$.
Die zugehörige Äquivalenzklasse: $\tilde{x} := \{y \in M | x \backsim y\}$.
Es gilt für alle $x, y \in M$:

(a) $x \in \tilde{x}$

(b) $M = \bigcup_{z \in M} \tilde{z}$

(c) $a \backsim b$ für alle $a, b \in \tilde{x}$

(d) $\tilde{x} = \tilde{y} \vee \tilde{x} \cap \tilde{y} = \emptyset$

1.4 Abbildungen

Seien M und N Mengen. Eine Abbildung φ von M in N ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu, welches *Bild* heißt. $x \in M$ ist ein *Urbild*. Mit $x\varphi$ wird das Bild bezeichnet. Die Zuordnungsvorschrift kann geschrieben werden als: $\varphi : x \mapsto x\varphi$. Sei $T \subseteq M$. $T\varphi := \{x\varphi | x \in T\}$. Spezialfall: $\emptyset\varphi = \emptyset$. $M\varphi$ heißt das $Bild\varphi$.

1.4.1 Spezielle Eigenschaften von Abbildungen

- φ heißt *injektiv*, falls gilt: Jedes Bild besitzt genau ein Urbild ($m, n \in M, m\varphi = n\varphi \Rightarrow m = n$).
- φ heißt *surjektiv*, falls gilt: Jedem Element der Menge N (in der die Bilder enthalten sind) ist mindestens einem Urbild zugeordnet ($Bild\varphi = \mathbb{N}$).
- φ heißt *bijektiv*, falls eine Abbildung injektiv und surjektiv ist.

  ◦ Genau dann ist eine Abbildung $\varphi : A \mapsto B$ zwischen englichen Mengen A, B mit $|A| = |B|$ injektiv, wenn sie surjektiv sind.

1.5 Folgen

1.5.1 reelle Zahlenfolge

Eine unendliche Folge $x_1, x_2, ..., x_n$ von reellen Zahlen x_i wird z. B. bezeichnet als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder z. B. $(x_n)_{n\in 1,2,3,...}$.

2 Binomialkoeffizienten

2.1 Definition

Für ganze Zahlen $0 \leq m \leq n$ ist $\binom{n}{m} := |\mathcal{P}_m(A)|$ mit $|A| = n$ (Betrag der Menge aller m-Elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge).

2.2 Spezialfälle

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{n-1} = n$

2.3 Die binomische Formel

$(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} \left(\binom{n}{m} \cdot a^m \cdot b^{n-m} \right)$

Beispiel: $(a+b)^1 = (a+b)$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

informeller Beweis: Sei $n \geq 1$. Multipliziere das Produkt $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot ...(a+b)$ aus. Erhalte eine Summe von Produkten, wobei jedes Produkt n Faktoren besitzt: $a^m \cdot b^{n-m}$ von $m = 0$ bis $n = 0$. Wie oft das Produkt für ein festes m vorkommt, ist durch den Binomialkoeffizienten bestimmt - der Summand $a^m \cdot b^{n-m}$ komm so oft vor, wie ich unter den n Faktoren m auswählen kann.

2.4 Summe von Binomialkoeffizienten

$2^n = \sum\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{m}$

2.5 gewöhnliche Definition von $\binom{n}{m}$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ Daraus folgt auch: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. Unter einem *leeren Produkt* (Produkt mit 0 Faktoren) ist 1 zu verstehen.

Beweis:

- Sei A eine Menge mit $|A| = n$ Elementen. Sei T die Menge aller m-Tupel $(a_1, ..., a_m)$, wobei $a_i \in A$ und paarweise verschieden (also $|\{a_1, ..., a_m\}| = m$).
- Definiere eine Äquivalenzrelation $\backsim$ auf T durch $(a_1, ..., a_m) \backsim (b_1, ..., a_m) :\Leftrightarrow \{a_1, ..., a_m\} = \{b_1, ..., b_m\}$.
- Anzahl der Äquivalenzklassen: $\binom{n}{m}$.

- Jede Äquivalenzklasse hat genau $m!$ Elemente.
- Also (Klassengleichung) $|T| = \binom{n}{m} \cdot m!$.
- nach (siehe oben) ist $|T| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(m-1))$.
- Daher: $|T| = \binom{n}{m} \cdot m! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(m-1))$.

$\Rightarrow \binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$

2.6 Addition von Binomialkoeffizienten

Behauptung: $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$ gilt für beliebige $n \in \mathbb{R}$, wenn $\binom{n}{m}$ so definiert wird, wie in 2.5.

Beweis: is so, steht ellenlang an der Tafel

2.7 Das Pascalsche Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \text{usw.} & & & & & &
\end{array}
$$

2.8 Die Bernoullische Ungleichung

$(1+a)^n \geq 1 + na$ für $a \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$

- Für $n = 0$ und $n = 1$ gilt $(1+a)^n = 1 + na$.
- Für $a > 0$ und $n \geq 2$ folgt $(1+a)^n > 1 + na$ aus 2.3: $1 \cdot a^0 \cdot 1^n + n \cdot a^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot 1 + \binom{n}{3} \cdot a^3 \cdot 1 ... > 1 + na$.
- Beweis von $(1+a)^n > 1 + na$ für $n \geq 2$ und $a > -1, a \neq 0$ durch vollständige Induktion nach n.

  Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig: $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$. Zu zeigen bleibt: Wenn die Ungleichung für ein beliebiges n gilt, so muß die Ungleichung auch für $n - 1$ gelten.

  $(1+a)^n = (1+a)^{n-1} \cdot (1+a) > (1+(n-1) \cdot a) \cdot (1+a) = 1 + na + (n-1) \cdot a^2 > 1 + na$.

3 Abbildungen

3.1 Definition, Schreibweise

Seien M und N Mengen. Eine Abbildung φ von M in N ordnet jedem Element aus M genau ein Element aus N zu, welches *Bild* heißt und mit $x\varphi$ bezeichnet wird. $x \in M$ ist ein *Urbild*. Die Zuordnungsvorschrift kann geschrieben werden als: $\varphi : x \mapsto x\varphi$. $M\varphi$ heißt das *Bild*φ. Schreibweisen für Anwendungen: x^φ; $x\varphi$; x_φ; φ_x; φx oder $\varphi(x)$.
Die Gleichheit von Abbildungen α, β mit demselben Definitionsbereich M wird definiert durch: $\alpha = \beta :\Leftrightarrow \alpha x = \beta x \forall\, x \in M$.

3.2 Allgemeine kartesische Produkte

Sei M eine Menge. Für jedes $x \in M$ sei eine Menge A_x gegeben. Die Menge aller Abbildungen α auf M mit $\alpha x \in A_x \;\forall\, x \in M$ wird mit $\prod\limits_{x \in M} A_x$ bezeichnet und das kartesische Produkt der Mengen $A_x (x \in M)$ genannt.

3.3 Umkehrfunktionen

$f : M \to f(M) \Rightarrow f^{-1} : f(M) \to M$ (f^{-1} ist eine Abbildung zwischen Potenzmengen!)

3.4 die Funktionen der Schulmathematik

Winkelfunktionen (sin; cos; tan; cot)	Umkehrfunktionen von Winkelfunktionen (arcsin; arccos; arctan; arccot)
Exponentialfunktionen	Logarithmusfunktionen
Polynomfunktion	$\sum\limits_{i=0}^{n}(a_i \cdot x^i)$
rationale Funktionen	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

4 Geordnete Mengen

- Sei M mit einer Menge, $\leq$ Ordnungsrelation auf M, dann ist M eine *geordnete Menge* (Hauptbeispiele: $M = \mathbb{R}$ mit $<$, $\mathcal{P}(A)$ mit $\subseteq$).
- Eine Menge ist *linear geordnet*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$.
- Die geordnete Menge M ist *wohlgeordnet*, wenn für jede nichtleere Teilmenge T von M gilt: T hat ein Minimum (z.B. ist $\mathbb{R}$ nicht wohlgeordnet, da $(0,1)$ kein Minimum hat).
- Zu jeder Ordnungsrelation gibt es eine duale Ordnungsrelation mit $x \leq^* y :\Rightarrow y \leq x$, und M^* mit $\leq^*$ ist die duale geordnete Menge zu M mit $\leq$.
- Aus der Wohlordnung einer Menge folgt, daß diese linear ist.
- Aus a ist Minimum folgt a ist ein minimales Element (siehe 4.1), für linear geordnete Mengen gilt die Folgerung auch für die Gegenrichtung

4.1 Definitionen

- Sei $X \subseteq M$.

$$\begin{aligned} X_{<a} &:= \{x \in X | x < a\} \\ X_{\leq a} &:= \{x \in X | x \leq a\} \\ X_{\geq a} &:= \{x \in X | x \geq a\} \\ X_{>a} &:= \{x \in X | x > a\} \end{aligned}$$

- das *Maximum:* jedes Element ist kleinergleich dem Maximum (Sei $a \in M$ das Maximum von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $a \geq x$).
- das *Minimum:* jedes Element ist größergleich dem Minimum (Sei $a \in M$ das Minimum von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $a \leq x$).
- ein *maximales Element:* es gibt kein größeres Element (Sei $a \in M$ ein maximales Element von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $x \geq a \Rightarrow x = a$).
- ein *minimales Element:* es gibt kein kleineres Element (Sei $a \in M$ ein minimales Element von M. Dann gilt für alle $x \in M$: $x \leq a \Rightarrow x = a$).
- *obere Schranke:* alle Elemente sind kleiner gleich der oberen Schranke (Sei a eine obere Schranke. Dann gilt für alle $x \in X$: $x \leq a$)

- *untere Schranke:* alle Elemente sind größer gleich der unteren Schranke (Sei a eine untere Schranke. Dann gilt für alle $x \in X$: $x \geq a$)
- *obere Grenze/Supremum:* die kleinste obere Schranke (Sei a eine obere Grenze. Dann gilt für alle oberen Schranken s: $a \leq s$)
- *untere Grenze/Infimum:* die größte obere Schranke (Sei a eine untere Grenze. Dann gilt für alle unteren Schranken s: $a \geq s$)
- *von oben beschränkt:* Es existiert mindestens eine obere Schranke
- *von unten beschränkt:* Es existiert mindestens eine untere Schranke
- *Intervall:* X ist ein Intervall von M bedeutet: $x, y \in X, z \in M, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in X$

$$
\begin{aligned}
[u,v] &:= \{x \in X | u \leq x \leq v\} \\
(u,v] &:= \{x \in X | u < x \leq v\} \\
[u,v) &:= \{x \in X | u \leq x < v\} \\
(u,v) &:= \{x \in X | u < x < v\}
\end{aligned}
$$

- *unterer Abschnitt:* X ist ein unterer Abschnitt von M bedeutet: $x \in X, y \in M, y \leq x \Rightarrow y \in X$[1]
- *oberer Abschnitt:* X ist ein oberer Abschnitt von M bedeutet: $x \in X, y \in M, y \geq x \Rightarrow y \in X$

Beispiel $M = \mathcal{P}(A)$ mit $\subseteq$, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$.

- $\mathcal{A}$ hat die obere Grenze $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{A}} U$
- $\mathcal{A}$ hat die untere Grenze $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{A}} U$
- $\mathcal{P}$ hat das Minimum $\emptyset$
- $\mathcal{P}$ hat das Maximum A
- Für $\mathcal{A} := \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ hat $\mathcal{A}$ als minimale Elemente alle einelementigen Teilmengen
- Für $\mathcal{A} := \mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$ hat $\mathcal{A}$ als maximale Elemente alle $(|A|-1)$-elementigen Teilmengen

[1] „Schade, daß ich hier keinen Stock habe... Moment, was ist denn das hier? Eine Antenne? Wozu braucht man hier eine Antenne? **zupf**“

4.2 Vollständigkeit

Die Eigenschaften (a) und (b) der geordneten Menge M sind äquivalent:

(a) Jede von oben beschränkte nichtleere Teilmenge hat eine obere Grenze

(b) Jede von unten beschränkte nichtleere Teilmenge hat eine untere Grenze

Erfüllt die Menge M die Eigenschaften (a) und (b), so heißt die *vollständig* (z. B. $\mathbb{R}$ ist vollständig).

4.2.1 Beispiel zur Vollständigkeit

Ist $\mathbb{Q}$ vollständig? Nein, z.B. die Menge $\{a \in \mathbb{Q} \mid a < \sqrt{2}\}$: die obere Grenze in $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{2}$.[2] Nehme man nun an, g sei eine obere Grenze in $\mathbb{Q}$ selbst. Dann findet man bei $g > \sqrt{2}$ immer noch eine rationale Zahl zwischen g und $\sqrt{2}$, damit ist g nicht die kleinste Schranke. Wenn $g < \sqrt{2}$ ist, so gibt es noch eine Zahl dazwischen, damit ist g gar keine Schranke.

4.3 Morphismen

Seien $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ zwei Gruppen. Seien $g_1, g_2 \in G$. Sei f eine Abbildung mit $f : G \to H$. Diese Abbildung f heißt...

- ... *Homomorphismus*, falls $f(g_1 \circ_G g_2) = f(g_1) \circ_H f(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.
- ... *Monomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und injektiv ist.
- ... *Epimorphismus*, falls f ein Homomorphismus und surjektiv ist.
- ... *Isomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und bijektiv ist.
- ... *Automorphismus*, falls f ein Isomorphismus und $G = H$ ist.

Bezogen auf geordnete Mengen gilt:

- ... *Homomorphismus*, falls $g_1 \leq g_2 \Rightarrow fg_1 \leq fg_2$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.
- ... *Monomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und injektiv ist.
- ... *Epimorphismus*, falls f ein Homomorphismus und surjektiv ist.
- f ist *Isomorphismus*, falls f ein Homomorphismus und bijektiv ist.

[2] „Hinreichend für die Erlangung des Übungsscheines ist die erfolgreiche Bearbeitung von 99% der Aufgaben. Notwendig ist die erfolgreiche Bearbeitung von 1% der Aufgaben."

- ... *Automorphismus*, falls f ein Isomorphismus und $G = H$ ist.
- ... *Anti-Isomorphismus*, falls $g_1 \leq g_2 \Rightarrow fg_1 \geq fg_2$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt mit bijektivem f.

Schreibweise: $H \backsimeq G :\Leftrightarrow H$ ist isomorph zu $G :\Leftrightarrow \exists$ Isomorphismus $f : G \rightarrow H$.

5 Geordnete Gruppen

5.1 Definitionen

5.1.1 Halbgruppe

Eine Halbgruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$ mit multiplikativer oder additiver Notation ($(x, y) \to xy$ oder $(x, y) \to x + y$), wenn folgendes gilt:

1. $(ab)c = a(bc)\ \forall\ a, b, c \in G$
2. die Halbgruppen, die in der Mathematik interessant sind, haben auch alle ein Einselement

5.1.2 Gruppe

Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$ mit multiplikativer oder additiver Notation ($(x, y) \to xy$ oder $(x, y) \to x + y$), wenn folgendes gilt:

1. $(ab)c = a(bc)\ \forall\ a, b, c \in G$
2. $\exists\ e \in G$ mit $ex = x = xe$ (*Anmerkung: es gibt nur ein solches „Einselement“, schreibe 1 für e*)
3. $\forall\ a \in G\ \exists\ b \in G\ :\ ab = ba = 1$ (*Anmerkung: zu jedem a gibt es nur ein einziges „Inverses“ b, schreibe a^{-1} für b*)[3]

Bemerkungen:

1. $ab = 1 \Rightarrow b = a^{-1} \Rightarrow a = b^{-1}$
2. $(a^{-1})^{-1} = a$
3. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ („a und b töten sich gegenseitig“)
4. $\forall\ a \in G\ :\ x \mapsto xa$ ist bijektiv

5.1.3 abelsche Gruppe

Eine Gruppe heißt *kommutativ* bzw. *abelsch*, falls $\forall\ a, b \in G\ :\ ab = ba$ gilt. Dann wird die Gruppe additiv notiert (mit Nullelement statt Einselement) mit $(x, y) \mapsto x + y$ und $a + (-a) = 0$; zusätzliche Notation: $a - b := a + (-b)$.

[3]„Ansonsten sind Vorlesungen nur dafür da, weil sonst kein Politiker dazu bereit wäre, für uns Geld zu bezahlen.“

5.1.4 Potenzen in multiplikativer Notation

Sei G eine Gruppe[4], $a \in G, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a^n := a \cdot a \cdot ... \cdot a$ bzw. bei $n = 0$ ist $a^0 := 1$. Es gelten die „normalen“ Regeln der Potenzrechnung:

- $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
- $a^{(nm)} = (a^n)^m$
- $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = a^{-n}$
- $(ab)^n = a^n \dot{b}^n$ bei abelschen Gruppen

5.1.5 Vielfache in additiver Notation

Sei G eine Gruppe, $a \in G, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist $n \cdot a := a + a + ... + a$ bzw. bei $n = 0$ ist $0 \cdot a := 0$. Es gelten die „normalen“ Regeln:

- $(n + m)a = na + ma$
- $(nm)a = n(ma)$
- $-(na) = n(-a) = (-n)a$
- $n(a + b) = na + nb$ bei abelschen Gruppen

5.1.6 geordnete Gruppe

Eine geordnete Gruppe ist eine abelsche Gruppe G, auf der zusätzlich eine lineare Ordnungsrelation $\leqq$ definiert ist[5], derart daß $x \leqq y \Leftrightarrow x + a \leqq y + a$ für alle $x, y, a \in G$ gilt (*gilt auch mit* $\Rightarrow$ *statt* $\Leftrightarrow$ *oder mit* $<$ *statt* $\leqq$). Für die Ordnungsrelation werden *positiv* und *negativ* als Bezeichnungen übernommen (größer bzw. kleiner als das neutrale Element).

Regeln in additiver Notation:

1. $x \leqq y \wedge x' \leqq y' \Rightarrow x + x' \leqq y + y'$
2. $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$
3. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$
4. $x < y \Leftrightarrow -x > -y$

[4] „Potenzen... so wie im zweiten Schuljahr!“

[5] „Leute die alles ganz besonders präzise haben wollen, ... ja, das kann leicht zu Sadismus ausarten...“

Regeln in multiplikativer Notation:

1. $x \leqq y \wedge x' \leqq y' \Rightarrow xx' \leqq yy'$
2. $x < y \Leftrightarrow yx^{-1} > 1$
3. $x < 1 \Leftrightarrow x > 1$
4. $x < y \Leftrightarrow x^{-1} > y^{-1}$

5.2 Sätze zum Supremum und Infimum

5.2.1 (Anti)-Automorphismen und deren Supremum/Infimum

Die Abbildung $\alpha : G \to G$ mit $\alpha : x \mapsto x + a$ ist ein Automorphismus der geordneten Menge G, für jede Teilmenge $X \subseteq G$ und jedes Element $a \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} sup(\{x + a \mid x \in X\}) &= sup(X) + a \\ inf(\{x + a \mid x \in X\}) &= inf(X) + a \end{aligned}$$

Die Abbildung $\beta : G \to G$ mit $\alpha : x \mapsto -x$ ist ein Anti-Automorphismus der geordneten Menge G, für jede Teilmenge $X \subseteq G$ gilt:

$$\begin{aligned} sup(\{-x \mid x \in X\}) &= -sup(X) \\ inf(\{-x \mid x \in X\}) &= -inf(X) \end{aligned}$$

5.2.2 gemeinsames Supremum zweier Teilmengen

Voraussetzung: $A, B \subseteq G$. $\alpha = sup(A); \beta = sup(B)$. Behauptung: $\alpha + \beta = sup(\{a + b \mid a \in A, b \in B\})$. Zu zeigen:

1. $\alpha + \beta \geq a + b \; \forall \; a \in A, b \in B$
2. $u \in G, u \geq a + b \; \forall \; a \in A, b \in B \Rightarrow \alpha + \beta \leq u$

Beweis:

1. $a \leq \alpha; b \leq \beta$ nach Voraussetzung für alle a, b; mit den oben genannten Eigenschaften gilt: $a + b \leq \alpha + \beta$.
2. Für alle $a \in A, b \in B$ gilt: $u - a \geq b$. Das heißt $u - a$ ist eine obere Schranke von B. Damit ist $u \geq a + \beta$. Daraus folgt: $u - \beta \geq a$. Da dies für alle $a \in A$ gilt, gilt es auch für das Supremum: $u \geq \alpha + \beta$.

5.2.3 gemeinsames Supremum mehrer Mengen

Voraussetzung: Sei $I = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ Indexmenge mit n Elementen, sei $A_i \subseteq G \; \forall \; i \in I$ mit $\alpha_i = sup(A_i) \; \forall \; i \in I$. Behauptung: $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i = sup\left(\sum\limits_{i \in I} A_i\right)$. (und genauso für das Infimum) Beweis:

- Für $n = 1$ trivial; für $n = 2$ gilt es nach 5.2.2.
- durch vollständige Induktion *(steht sehr wirr und klein an der Tafel, ist relativ trivial)*

5.2.4 Supremum eines Produkts

Voraussetzung: $A \subseteq G$, $\alpha = sup(A)$, $n \in \mathbb{N}$. Behauptung: $n \cdot \alpha = sup(\{n \cdot x \mid x \in A\})$. Beweis: Setzte $A' = \{n \cdot x \mid x \in A\}$. Wende 5.2.3 an mit $A_1 = A_2 = ... = A_n$. Dann ist $n\alpha = sup(A_1 + A_2 + ... + A_n) = sup(U)$. Damit genügt es zu zeigen, daß U und A' die gleichen oberen Schranken haben. Betrachte dazu:

1. $A' \subseteq U$
2. $\forall \; u \in U \; \exists \; s \in A'$ mit $u \leq s$

zu (2): $u = a_1 + a_2 + ... + a_n$. O.B.d.A. ist $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Setze $s = n \cdot a_n$. Dann gilt: $s \geq u$.

5.3 archimedische Ordnung

Sei $a > 0$. Dann ist $0 < a < 2a < 3a$. G heißt *archimedisch geordnet* genau dann, wenn $\forall \; a > 0$ gilt: die Teilmenge $\mathbb{N}a := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ *nicht* von oben beschränkt (und $\mathbb{N}(-a)$ ist nicht von unten beschänkt).

5.3.1 hinreichende Bedingung für archimedische Ordnung

Satz: Aus der Vollständigkeit von G folgt: G ist archimedisch. Beweis durch Widerspruch: Annahme: G sei nicht archimedisch. Dann existiert $a > 0$, derart daß $\mathbb{N}a$ von oben beschränkt ist. Dann existiert ein kleinste obere Schranke $g = sup(\mathbb{N}a)$ (nach der Vollständigkeit). Wegen $a > 0$ ist $g - a < g$ und $g - a$ nicht mehr obere Schranke. Es exitiert also ein Element $na \in \mathbb{N}a$ mit $na > g - a$. Daraus folgt $na + a > g \Rightarrow (n + 1)a > g$. Da aber $(n + 1)$ auch eine natürliche Zahl ist, kann $(n + 1)a$ nicht gröser als die obere Grenze g sein. Das fürt zu einem Widerspruch , also ist G archimedisch!

6 Geordnete Körper

6.1 Definition des Ringes

Ein *Ring* ist eine (additiv geschreibene) abelsche Gruppe A zusammen mit einer Multiplikation $A \times A \to A$ derart daß für alle $a, b, c \in A$ gilt:

- $(ab)c = a(bc)$
- $a(b + c) = ab + ac$ [6]
- $(b + c)a = ba + ca$

Bemerkungen:

- Ein Ring heißt kommutativ, wenn die Multiplikation kommutativ ist.
- Bezüglich der Multplikation ist ein Ring u.a. deswegen keine Gruppe, da es bei der Multiplikation nicht unbedingt inverse Elemente gibt!
- $a(-b) = -ab = -a(b)$ (Beweis für den ersten Teil: $0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b)$)

6.1.1 Beispiele

- $\mathbb{Z}$
- Menge aller Funktionen von der Menge M in $\mathbb{R}$ ($\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$) mit $f + g : x \to f(x) + g(x)$; $f \cdot g : x \to f(x) \cdot g(x)$

  (Nullelement (Neutrales der Addition): $x \to 0$; $-f : x \to -f(x)$; Einselement (Neutrales der Multiplikation): $x \to 1$, kommutativ)
- Menge aller Funktionen von der Menge M in $\mathbb{R}$ ($\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$) mit $f + g : x \to f(x) + g(x)$; $f \circ g : x \to f(g(x))$ (Nullelement (Neutrales der Addition): $x \to 0$; $-f : x \to -f(x)$; Einselement (Neutrales der Multiplikation): $id_{\mathbb{R}}$, nicht kommutativ)
- $A := \{0\}$ ist ein Ring!

[6] Konvention: Punkt- vor Strichrechnung

6.2 Definition des Körpers

Ein *Körper* ist ein *kommutativer* Ring K mit Einselement $1 \neq 0$, derart daß jedes Element $a \neq 0$ von K ein multiplikatives Inverses a^{-1} hat. Bemerkungen:

- Für $a \neq 0 \neq b$ ist auch $ab \neq 0$.
- $a0 = a(0+0) = a0 + a0 = 0$ und $0a = 0$
- Bezeichnung: $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ für alle $b \neq 0$ mit „normalen "Regeln der Bruchrechnung
- Charakteristik eine Körpers siehe Lineare Algebra
- Interessant: Körper der rellen, komplexen und rationalen Zahlen, andere Fälle eher uninteressant

6.3 Definition des geordneten Körpers

Ein geordneter Körper ist ein Körper K zusammen mit einer linearen Ordnungsrelation $\leq$ derart daß für alle $x, y \in K$ gilt:

- $x \leq y \Leftrightarrow x+a \leq y+a$ (d.h. bezüglich der Addition ist K eine geordenete Gruppe)
- $x \leq y \Leftrightarrow xa \leq ya$ für positive a

Bemerkungen/Regeln:

- $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$ (echt kleiner)
- $x < y \Leftrightarrow xa < ya$ (echt kleiner) für positive a
- a positiv $:\Leftrightarrow a > 0$
- a negativ $:\Leftrightarrow a < 0$
- $ab > 0$ für positive a, b
- $ab < 0$ für negative a, b
- $ab < 0$ für ein negatives und eine positives Element
- a^2 ist positiv
- das Einselement ist positiv

- a positiv $\Rightarrow a^{-1}$ positiv
- a negativ $\Rightarrow a^{-1}$ negativ
- Die Menge $K_{>0}$ der positiven Elemente von K ist bezüglich der Multiplikation eine geordnete Gruppe.

6.4 Definition: archimedischer Körper

Ein Körper K heiße archimedisch genau dann, wenn K^+ (d.h. die geordnete Gruppe bezüglich der Addition) archimedisch ist; d.h. für jedes positive Element $a \in K^+$ hat die Menge $\mathbb{N}a := \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine obere Schranke.

- Die Folge $a, 2a, 3a, ...$ ist streng monoton wachsend (d.h. $a < 2a < 3a < 4a < ...$)
- Hinreichend für K archimedisch ist, die Bedingung für $a = 1$ zu zeigen.

6.4.1 weitere Sätze zur Vollständigkeit

Sei K ein vollständiger Körper. Aus der Vollständigkeit von K folgt: K_0 ist vollständig und K^+ und $K_{>0}$ sind archimedisch. Ist K vollständig, so ist für jedes $a > 1$ die Folge $a, a^2, a^3, a^4, ...$ von oben unbeschränkt (und $a < a^2 < a^3 < a^4$). Die Folge $a^{-1} > a^{-2} > a^{-3} > ...$ ist für jedes $a > 1$ nach unten unbeschränkt in $K_{>0}$, d.h. $0 = \inf\{a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ...\}$.

7 Eigenschaften des Systems $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ ist ein vollständig angeordneter Körper

- $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, ...\}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

7.1 Sätze zur Ordnungsrelation

1. $x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$ (bzw. $\leq$)
2. $x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow x + a \leq y + b$ (z.T. auch $<$)
3. $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$
4. $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$
5. $x < y \Leftrightarrow -x > -y$
6. $x < y \Leftrightarrow xa < ya$ (für positive a)
7. $x \leq y \wedge a \leq b \Rightarrow xa \leq yb$ (für positive a, b)
8. $x < y \Leftrightarrow \frac{y}{x} > 1$
9. $x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1$
10. $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Bezeichnung: Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{P} := \mathbb{R}_{>0}$

7.2 „Vererbung“ von Grenzen/Schranken

Aus den oben genannten Eigenschaften folgt: Für Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}$ oder $X \subseteq \mathbb{P}$ gilt:

- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn $-b$ untere Schranke/untere Grenze von $-X$ ist.
- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn b^{-1} untere Schranke/untere Grenze von X^{-1} ist für $b > 0$

- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn $b + a$ obere Schranke/obere Grenze von $X + a$ ist für $a, b > 0$.
- Genau dann ist $b \in \mathbb{R}$ obere Schranke/obere Grenze, wenn ba obere Schranke/obere Grenze von Xa ist für $a, b > 0$

7.3 Archimedes etc.

- Für jedes $x > 0$ ist die Folge $1x, 2x, 3x, 4x, ...$ streng monoton wachsend und von oben unbeschränkt.
- Für jedes $x > 1$ ist die Folge $x^1, x^2, x^3, x^4, ...$ streng monoton wachsend und von oben unbeschränkt.
- Ist $x_1, x_2, x_3, ...$ irgendeine (streng) monoton wachsende Folge positiver Zahlen. Dann ist die Folge der Kehrwerte (streng) monoton fallend.
- Ist die (streng) monoton wachsende Folge positiver Zahlen $x_1, x_2, x_3, ...$ unbeschränkt, so ist die Folge der Kehrwerte in $\mathbb{P}$ von unten unbeschränkt; aber 0 ist das Infimum der Folge der Kehrwerte.
- Die Zahl 0 ist Infimum der Menge der Kehrwerte der natürlichen Zahlen ($\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$)
- Zu jeder positiven Zahl ε existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

7.4 Definition von dicht

Zu reelen Zahlen $x < y$ existiert eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$. $\mathbb{Q}$ heißt damit *dicht* in $\mathbb{R}$.

Beweis: Wegen $y - x > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(y - x) > 1$. Also existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $nx < m < ny$. Damit folgt: $x < \frac{m}{n} < y$. Somit gibt es eine rationale Zahl zwischen beliebigen x und y.

Folgerung: Für jede reelle Zahl[7] $u \in \mathbb{R}$ ist $u = \sup \mathbb{Q}_{<u}$ und $u = \inf \mathbb{Q}_{>u}$.

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ mit $f : x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis:

1. streng monoton wachsend: Sei $0 < x < y$. Dann ist $x^n < y^n$.

[7] „Das $\mathbb{R}$ gibt es nur einmal, das ist so eine Art Naturkonstante, das hat der liebe Gott so gewollt. Und dann hat der Mensch auch die Verpflichtung, sich damit zu beschäftigen.“

2. Vorbermerkung: Für $X \subseteq \mathbb{P}$ und $b = \sup(X)$ bzw. $b = \inf(X)$ gilt: $b^n = \sup(X^n)$ bzw. $b^n = \inf(X^n)$

   surjektiv: Sei jetzt $u \in \mathbb{P}$. Gesucht: $w \in \mathbb{P}$ mit $w^n = u$. Wir dürfen $u > 1$ annehmen (da $u < 1 \Rightarrow \frac{1}{u} > 1$). Setze $X := \{x \geq 1 | x^n \leq u\}$. Die Menge ist nicht leer ($1 \in X$) und von oben beschränkt ($x \leq x^n \leq u$), damit kann die Vollständigkeit verwendet werden.

   Damit hat X eine obere Grenze w. $w^n = sup(X^n) \leq u$. Annahme: $w^n < u$. Betrachte $a > 1$; $w < wa = \sup Xa$ Dann existiert ein $x \in X$ mit $xa \notin X$. Also ist $(xa)^n > u$. Damit ist $a^n > \frac{u}{x^n} > \frac{u}{w^n} > 1$. Also existiert ein $g > 1$ mit $a^n > g$ für alle $a > 1$.

7.5 Potenzen mit rellen Exponenten

zunächst rationale Exponenten: Für $q = \frac{m}{n}$ und $a > 0$ setze $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$. Für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ und $a, b > 0$ gilt: $a^{p+q} = a^p a^q$; $a^{pq} = (a^p)^q$; $(ab)^q = a^q b^q$. Problem: Uneindeutigkeit der Darstellung von rationalen Zahlen ($q = \frac{m}{n} = \frac{xm}{xn}$)

Erweiterung zu reelen Exponenten: Gesucht ist eine Definition von a^x für $x \in \mathbb{R}$. Für alle diese x ist $x = \sup \mathbb{Q}_{<x}$ und $x = \inf \mathbb{Q}_{>x}$. Zudem gilt: $\sup\{a^q | q < x\} \leq \inf\{a^q | q > x\}$. Es gilt sogar die Gleichheit, setze dann $a^x = \sup\{a^q | q < x\} = \inf\{a^q | q > x\}$.

8 Konvergenz reeller Zahlenfolgen

8.1 der Betrag einer reellen Zahl, Dreiecksungleichung

Der Betrag einer reelen Zahl: $|a| = a$ für $a \geq 0$, $|a| = -a$ für $a < 0$. Klar: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $|ab| = |a|\,|b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Dreiecksungleichung: $|a + b| = |a - b| \leq |a| + |b|$; Beweis: Fallunterscheidung:

- bei $a, b \geq 0$ gilt: $|a + b| = a + b = |a| + |b|$
- bei $a, b \leq 0$ gilt: $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| = |b|$
- bei $a < 0$ und $b > 0$ und $a + b \leq 0$ gilt: $|a + b| = a + b \leq a + b + (-2b) = a + (-b) = |a| + |b|$
- bei $a < 0$ und $b > 0$ und $a + b > 0$ gilt: $|a + b| = -(a + b) \leq -(a + b) + (2a) = a + (-b) = |a| + |b|$
- analog für $b < 0$ und $a > 0$

8.2 Induktive Definition einer Folge

Eine Folge[8] $x_1, x_2, x_3, ...$ ist definiert durch:

1. gebe x_1 an (etwa $x_1 = 5$)
2. gebe an, wie ich x_{n+1} aus x_n erhalte (etwa durch $x_{n+1} = 2x_n - 1$)

bzw. allgemeiner:

1. gebe x_1 bis x_k an
2. gebe an, wie ich x_{n+k+1} aus x_n bis x_{n+k} erhalte

Sie wird notiert als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Beispiel: Fibonaccifolgen: Vorgegeben seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Die Fibonaccifolge ist definiert für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3$ definiert als $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ (bedeutend z.B. in der Linearen Algebra als Vektorraum)

[8] Folge bedeutet immer *unendliche Folge*

8.3 Beschränktheit

- Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn gilt: $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b \,\forall\, x \in X$. Dies ist äquivalent zu: $\exists\, c > 0$ mit $|x| \leq c \,\forall\, x \in X$. Dies ist äquivalent zu: $\exists\, c > 0$ und $u \in \mathbb{R}$ mit $|u - x| \leq c \,\forall\, x \in X$.

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist beschränkt genau dann, wenn $f(D)$ beschränkt ist.

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt genau dann, wenn $\{x_n | b \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

- Bemerkung: Die Vereinigung von endlich[9] vielen beschränkten Teilmengen ($\subseteq \mathbb{R}$) ist beschränkt.

8.4 ε-Umgebung

Zahlen, die von einer Konstante a maximal den Abstand a haben, liegen in $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid\ |x - a| < \varepsilon\}$. Sei (x_n) eine streng monoton steigende und beschränkte reelle Folge. Setze $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < \varepsilon \;\forall\; n \geq m$. (analog mit fallend).

8.5 Limes

a heißt *Limes* von (x_n) genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a - x_n| < \varepsilon \,\forall\, n \geq m$. Schreibe $\lim_{n\to\infty} x_n$ (kurz: $\lim x_n$ oder $x_n \to a$.

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists m\; \forall n \geq m : |a - x_n| < \varepsilon$$

Satz: Es gibt höchstens ein a. Beweis: Seien a, b Grenzwerte der Folge (x_n) und $a < b$. Setze $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Dann existiert ein n, so daß $|a - x_n| < \varepsilon$ und $|b - x_n| < \varepsilon$. Damit erhalten wir: $b - a = |b - a| = |(b - x_n) - (a - x_n)| \leq |b - x_n| + |a - x_n| < 2\varepsilon = b - a$, also $b - a < b - a$. Damit gibt es nur einen Grenzwert.

Beispiele:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$

Eine Folge heißt *konvergent*, wenn für sie ein Limes existiert.

[9] nach einem Hinweis auf einen Fehler an der Tafel: „Wenn ich Sie in der Mensa treffe, geb' ich Ihnen ein Bier aus!“ (Gibt's in der Mensa Bier?!)

8.6 Beschränktheit konvergierender Folgen

Eine konvergente Folge ist beschränkt: Sei (x_n) eine Folge. Sei $a = \lim x_n$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < 1 \; \forall \; n \geq m$. Also ist $\{x_n \mid n \geq m\}$ beschränkt.

8.7 Nullfolge

Eine Folg eheißt Nullfolge, wenn ihr Limes gleich 0 ist. Das bedeutet, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$. Also gilt: $a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow (a - x_n)$ ist eine Nullfolge.

8.7.1 Rechenregeln

1. Sind (x_n) und (y_n) Nullfolgen, so ist auch $(x_n + y_n)$ eine Nullfolge.
2. Ist (x_n) eine Nullfolge und (y_n) beschränkt, so ist auch $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.

Beweis:

1. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$ und ein $m' \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m'$. Sei $m_{max} = max(m, m')$ Es folgt: $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq 2\varepsilon \; \forall \; n \geq m_{max}$.

   Anmerkung: Ob der Beweis für ε oder $x\varepsilon$ mit $x > 0$ gezeigt wird, ist egal. Im Zweifelsfall wird m bzw. m' so gewählt, daß $|x_n|$ für alle $n \geq m$ kleinergleich $\frac{\varepsilon}{x}$ ist.
2. Es existiert ein $c > 0$ mit $|y_n| < c$ für alle n. Sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$. Es folgt: $|x_n y_n| = |x_n| \, |y_n| \leq c\varepsilon \; \forall \; n \geq m$.

8.8 Limes von mehreren konvergenten Folgen

Voraussetzung: Sei $a = \lim x_n$ und $b = \lim y_n$.

Behauptung:

1. $a + b = \lim x_n + y_n$
2. $ab = \lim x_n y_n$
3. $a^q = \lim x_n^q$ für alle $q \in \mathbb{N}$

Beweis:

1. zu zeigen: $((a+b)-(x_n+y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. $z_n = (a+b) - (x_n+y_n) = (a-x_n)+(b-y_n)$. Wie eben gezeigt, ist z_n als Summe zweier Nullfolgen ebenfalls eine Nullfolge.

2. zu zeigen: $((a-x_n)(b-y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. $z_n = (ab - ay_n - bx_n + x_ny_n = ab - x_ny_n + (x_n-a)y_n + (y_n-b)x_n$. Die beiden hinteren Summanden sind Nullfolgen. Die Folge $(ab-x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, d.h. $\lim x_ny_n = ab$.

3. zurückzuführen auf das Produkt von Folgen

8.9 Uneigentliche Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n \to +\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, u\in\mathbb{R}\ \exists\, m\in\mathbb{R} : x_n > u\ \forall\, n \geq m$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, u\in\mathbb{R}\ \exists\, m\in\mathbb{R} : x_n < u\ \forall\, n \geq m$$

Regeln:

- Ist $\lim x_n = \infty$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch $\lim x_n + y_n = \infty$.
- Ist $\lim x_n = \infty$ und existiert ein $c > 0$ mit $|y_n| > c\ \forall\, n$, so ist auch $\lim x_n + y_n = \infty$.
- Wenn $x_n \neq 0\ \forall\, n$ und $a \neq 0$, gilt: $\frac{1}{a} = \lim \frac{1}{x_n}$ bei $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.
- $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = \infty$ und $\lim x_n = \infty \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = 0$

zu den letzten beiden Sätzen:

- Es gilt: $\frac{1}{a} - \frac{1}{x_n} = (x_n - a)\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x_n}$. Da $(x_n - a)$ eine Nullfolge ist, reicht es zu zeigen, daß $\frac{1}{x_n}$ beschränkt ist (wie oben gezeigt). Sei etwa $a > 0$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $s := a - \varepsilon > 0$ Für alle bis auf endlich viele x_n gilt: $s \leq x_n \leq Z$. D.h. $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{x_n} \geq \frac{1}{Z}$ (nur mit Zeichnung logisch, aber offensichtlich)
- Setze $\varepsilon := \frac{1}{u} > 0$. Dann existiert ein m mit $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq m$. Also $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = u$.

8.10 wichtige Folgen

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = 0$ für jedes rationale $q > 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes $a > 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4. $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ für alle a mit $|a| < 1$
5. $\lim_{n\to\infty} = \frac{n^k}{a^n} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und a mit $|a| \geq 1$.[10]

BEWEIS:

1. Es genügt zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} n^q = \infty$. Die Funktion $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^q$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt. Also Die Folge $(n^q)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und unbeschränkt.
2. Die Folge ist für $a > 1$ streng monton fallend.

   Beweis: $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n+1]{a}$. Daraus folgt: $(\sqrt[n]{a})^{n+1} \leq (\sqrt[n+1]{a})^{n+1} \Rightarrow a \cdot \sqrt[n]{a} \leq a \Rightarrow \sqrt[n]{a} \leq 1 \Rightarrow a \leq 1$.

   Es bleibt für $a > 1$ zu zeigen: 1 ist untere Grenze. Annahme: $\exists b > 1$ mit $b \leq \sqrt[n]{a}\ \forall\, n$. Es folgt: $b^n \leq a\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, Widerspruch! Der Fall $a = 1$ ist trivial, der Fall $a < 1$ ist analog mit $\frac{1}{a}$.
3. zwei Beweise:

   (a) Zeige genauer: Die Folge ist ab $n = 3$ streng monoton fallend und 1 ist untere Grenze.

   (b) Setze $x_n := \sqrt[n]{n} - 1\ \forall\, n$ ($x_n > n\ \forall\, n \geq 2$). Zu zeigen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist

[10] „Mich interessiert an der Mathematik nicht, wo man sie anwendet, sondern nur der Spaß, den man damit hat!“

eine Nullfolge.

$$\begin{aligned}
n &= (\sqrt[n]{n})^n \\
&= (1+x_n)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_n^i \\
&> 1 + \binom{n}{2} x_n^2 \\
n-1 &> \left(\frac{1}{2} n(n-1)\right) x_n^2 \\
1 &> \frac{n x_n^2}{2} \\
x &< \sqrt{\frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

Die Folge $\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend mit unterer Grenze 0. Also ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Das heißt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} : \sqrt{\frac{2}{m}} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq m : x_n < \varepsilon$$

4. Für $a \neq 0$ ist die Folge $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}} = (|a^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend mit unterer Grenze 0.

5. Es darf $a > 1$ angenommen werden. Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} = \frac{a^n}{n^k} = \infty$. Setze $b = a - 1 > 0$. Für $n > 2k$ gilt: $n - k > \frac{1}{2}n$ und daher

$$\begin{aligned}
a^n &= (1+b)^n \\
&> \binom{n}{k+1} b \\
&= \frac{n(n-1)...(n-k)}{(k+1)!} b^{k+1} \\
&\geq (\frac{n}{2})^{k+1} \cdot \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} \\
\frac{a^n}{n^k} &> n \left(\frac{b^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}\right) \\
c &:= \frac{b^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} \\
\frac{a^n}{n^k} &> nc
\end{aligned}$$

Sei nun $u > 0$ gegeben. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 2k$ und $mc > u$ (Archimedes!). Für alle $n \geq m$ ist dann $\frac{a^n}{n^k} > nc \geq mc > u$.

8.11

Sei $a = \lim x_n, b \in \mathbb{R}$. Es gilt:

1. $x_n \leq b \,\forall\, n \Rightarrow a \leq b$.
2. $x_n \geq b \,\forall\, n \Rightarrow a \geq b$
3. $b = \lim y_n, x_n \leq y_n \,\forall\, n \Rightarrow a \leq b$

Es genügt zu zeigen: Es gilt für fast alle (d.h. für alle bis auf endlich viele).

8.12 Einquetschungssatz

Sei $a = \lim x_n = lim z_n$ und außerdem $x_n \leq y_n \leq z_n \,\forall\, n$. Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes a.

8.13 Beispiele

- Gegeben sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{2n+1}{3-5n}$ - existiert ein Grenzwert für $n \to \infty$? Zerlegung: $\frac{2n}{3-5n} + \frac{1}{3-5n}$, der hintere Summand geht gegen 0, für den vorderen Summanden betrachte die inverse Folge $\frac{3-5n}{2n}$. Diese wird wieder zerlegt in $\frac{3}{2n} - \frac{5n}{2n}$. Der vordere Summand geht gegen null, der hintere gegen $-\frac{5}{2}$, die ganze Folge daher gegen den Kehrwert, also gegen $-\frac{2}{5}$.

- Gesucht ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + an + b} - n$. Betrachten wir $\frac{1}{n}(\sqrt{n^2 + an + b} - n)(\sqrt{n^2 + an + b} + n) = a + \frac{b}{n}$. Es folgt: $\sqrt{n^2 + an + b} - n = (\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + 1)^{-1} \cdot (a + \frac{b}{n})$. Der hintere Faktor geht geben a, der vordere gegen 2^{-1}, das Produkt also gegen $\frac{a}{2}$.

- Ein wichtiges Beispiel: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ist konvergent, der Grenzwert ist kleinergleich 3, genauer: Streng monoton wachsend mit $x_n < 3$.

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot 2n \cdot 3n} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n} + ... \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + ... + (\frac{1}{2})^{n-1} \\
&= 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 1 + 2 = 3
\end{aligned}
$$

(mit geometrischer Reihe: $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$)

- Sei $\lim_{n\to\infty} = a$ und $x_n \geq 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$. Beweis: Erster Fall: $a = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein m mit $|x_N| < \varepsilon^2 \; \forall \; n \geq m$. Daraus folgt: $\left|\sqrt{x_n}\right| < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$. Zweiter Fall: $a > 0$. Zu zeigen: $\sqrt{a} - \sqrt{x_n} \to 0$. Es gilt: $(\sqrt{a} - \sqrt{x_n})(\sqrt{a} + \sqrt{x_n}) = a - x_n$. Da $a - x_n$ gegen 0 geht und der Faktor $(\sqrt{a} + \sqrt{x_n})$ größer als 0 ist, folgt: $\sqrt{a} - \sqrt{x_n} = \frac{a - x_n}{\sqrt{a} + \sqrt{x_n}}$. Mit (8.7.1) und der Beschränktheit von $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{x_n}}$ (durch $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und 0) folgt: $\sqrt{a} - \sqrt{x_n} \to 0$.

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \notin X$. Dann gilt: (X und $\left\{ \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in X \right\}$ sind beschränkt) $\Leftrightarrow$ ($\exists \; c, d > 0$ mit $c \leq x \leq d \; \forall \; x \in X$). Eine solche Teilmenge X heißt (bei Bender!) *positiv beschränkt*.

9 Metrische Räume; Häufungspunkte

9.1 Vorbemerkung

Für $x, y \in \mathbb{R}$ setze $d(x, y) = |x - y|$ (Abstand). Dann gelten folgende Regeln:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Beweis: Setze $a = x - y$ und $b = y - z$; Es gilt: $|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

9.2 Metrischer Raum

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge M zusammen mit einer Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften aus (9.1). Hauptbeispiel: $\mathbb{R}$.

9.3 Umgebungen, Beschränktheit

- Sei M ein metrischer Raum, $X \subseteq M$, $a \in M$. Definition: $U_\varepsilon(a) := \{x \in M \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ (wobei $\varepsilon > 0$) ist eine ε-*Umgebung* von a (bzw. ein Kreis um a mit dem Radius ε).
- X ist eine *Umgebung* von a genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(a) \subseteq X$. Äquivalent dazu ist die Bezeichnung: a ist ein *innerer Punkt* von X. Definitionen für *äußere Punkte* und *Randpunkte* folgen später genau.
- X heißt beschränkt genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert mit $d(x, y) < c \; \forall \, x, y \in X$. (d.h. X ist Teilmenge eines Kreises)
- a ist Häufungspunkt von X genau dann, wenn jede Umgebung von a unendlich viele „Punkte“ von X enthält. Es genügt hier auch: Jede Umgebung von a enthält wenigstens ein Element aus $x \in X$ mit $x \neq a$.

9.4 Folgen im metrischen Raum, Cauchy

Sei M ein metrischer Raum.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in M; $a \in M$. a heißt *Limes* von (x_n) genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a, x_n) < \varepsilon \; \forall \; n \geq m$.

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists m \; \forall n \geq m : d(a, x_n) < \varepsilon$$

  Analoge Formulierung: Jede Umgebung von a enthält fast alle Glieder der Folge

- a ist ein *Häufungspunkt* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn jede Umgebung U von a unendlich viele Glieder[11] der Folge enthählt.

- *Beispiel:* Die Häufungspunkte der Folge (in $\mathbb{R}$) 1 2 1 2 1 2 1 2 ... sind 1 und 2; die Folge der natürlichen Zahlen hat keine Häufungspunkte.

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *konvergent* genau dann, wenn sie einen Limes besitzt.

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *beschränkt* genau dann, wenn $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

- Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchyfolge* genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein m mit $d(x_p, x_q) < \varepsilon \; \forall \; p, q \geq m$. Gleichwertig: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein m mit $d(x_m, x_q) < \varepsilon \; \forall \; q \geq m$.

- Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn es natürliche Zahlen $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ gibt mit $y_1 = x_{j_1}, y_2 = x_{j_2}, y_3 = x_{j_3}, \ldots$. Beispiele: Die Folgen der Quadratzahlen und der Primzahlen sind Teilfolgen der Folge aller natürlichen Zahlen,

9.5 Grundregeln

Sei M ein metrischer Raum.

1. Eine Folge in M hat höchstens einen Limes.

2. a ist Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn a Limes einer Teilfolge ist.

3. Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist sie eine Cauchyfolge.

4. Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, ist sie beschränkt.

[11] bzw. unendlich viele durch ihre Indizes unterscheidbare Folgeglieder

5. Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und a Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, ist a der Grenzwert der Folge.

6. a ist Limes von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(d(a,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Äquivalent dazu: es existiert eine Nullfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $d(a,x_n) \leq |y_n|$ für fast alle n.

7. a ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn a Häufungspunkt der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist oder die konstante Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

8. Sei $X \subseteq M$. Wenn a ein Häufungspunkt von X ist, existiert eine Folge in X, deren Grenzwert a ist[12].

Beweis:

1. Zu $a, b \in M$ mit $a \neq b$ existieren Umgebungen A und B mit $A \cap B = \emptyset$.

2. Wenn a Limes einer Teilfolge ist, ist a trivialerweise Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Andere Richtung: Annahme: a ist Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit gilt: $U_{\frac{1}{n}}$ enthält unendlich viele Folgenglieder. Definiere eine Teilfolge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $j_1 := 1$ und $j_{n+1} :=$ die kleinste Zahl $p > j_n$ mit $d(a,x_p) < \frac{1}{n+1}$. Es gilt: $d(a,y_n) < \frac{1}{n}$ für alle n. Also: $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

3. Sei $\varepsilon > 0$ und $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann existiert ein m mit $d(a,x_n) < \varepsilon \; \forall\, n \geq m$. Erhalte $d(x_p,x_q) < 2\varepsilon \; \forall\, p,q \geq m$.

4. $\exists\, m : d(x_p,x_q) < 1 \; \forall\, p,q \geq m$. Dannn ist $\{x_n \mid n \geq m\}$ beschränkt.

5. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein m mit $d(x_p,x_q) \; \forall\, p,q \geq m$. Es existiert ein $p \geq m$ mit $x_p \in U_\varepsilon(a)$. Dann ist $d(a,x_q) < 2\varepsilon \; \forall\, q \geq m$ (Dreiecksungleichung, $d(a,x_p) < \varepsilon$ und $d(x_p,x_q) < \varepsilon$)

6. Siehe Definition von Limes

7. *(nur mündlich)*

8. Für jede $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in X$ mit $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$. Betrachte die Folge der Abstände $d(a,x_n) < \frac{1}{n}$, dann ist a Grenzwert[13].

[12] „Warum schreibe ich das so kompliziert auf? Möglicherweise laufe ich zu viel in den Übungsgruppen herum...“

[13] Sprechstunde: Di $2 - \frac{1}{2}4$ (das kann man doch kürzen!) und Mo $2 - 3 - \frac{1}{2}4$ (also -3?)

9.6 Satz von Bolzano-Weierstrass

1. In $\mathbb{R}$ hat jede unendliche beschränkte Teilmenge einen Häufungspunkt.
2. In $\mathbb{R}$ hat jede beschränkte Folge einen Häufungspunkt.

Beweis:

1. Sei $X \subseteq [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Definiere (simultan induktiv) zwei Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...$ und $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq ...$ mit $a_n < b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (b_n - a_n)$ und $X \cap [a_n, b_n]$ ist unendlich für alle n.

   Setze $a_1 = a$ und $b_1 = b$. Seien $a_1, ..., a_n$ und $b_1, ..., b_n$ bereits definiert. Setze $m := a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$ (Mittelpunkt des Intervalls).

   (a) $X \cap [a_n, m]$ ist unendlich. Setze $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = m$.
   (b) $X \cap [m, b_n]$ ist unendlich. Setze $a_{n+1} = m$ und $b_{n+1} = b_n$.

   Erhalte also eine Folge von Intervallen (Intervallschaltelung) mit $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ und $|X \cap [a_n, b_n]| = \infty$.

   Dann gilt für alle $i, j : a_i < b_j$. Also: $\lim_{n\to\infty} a_i = u := sup\{a_i\} \leq inf\{b_i\} =: v = \lim_{n\to\infty} b_i$. Zudem ist $(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}(b - a)$ Nullfolge. Also ist $u = v$!

   Behauptung: u ist Häufungspunkt von X. Zu zeigen: Zu $\varepsilon > 0$ exsitieren unendlich viele $x \in M$ mit $x \in U_\varepsilon(u)$. Beweis: Es existiert ein n mit $b_n - a_n < \varepsilon$. Dann ist $U_\varepsilon(u) \geq [b_n, a_n]$. Damit gilt: $M \cap U_\varepsilon(u)$ unendlich.

   Beispiel: $u = sup\{a_i \mid i\}$ Dann: $u \in [a_n, b_n]\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $\varepsilon > 0\ \exists\ n$ mit $b_n - a_n < \varepsilon$ (d.h. $[a_n, b_n] \subseteq U_\varepsilon(u)$).

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Setze $X := \{x_n \mid n\}$.

   (a) $|X| = \infty$, wende (1) an
   (b) X endlich. Dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstante Teilfolge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$, also ist a Häufungspunkt.

9.7 Konvergenz von Cauchyfolgen

In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchyfolge.

Beweis: Cauchyfolge mit (9.6) $\Longrightarrow$ beschränkt; mit (9.6) $\Longrightarrow \exists$ Häufungspunkt a; mit (9.5) $\Longrightarrow a$ ist Limes.

9.8 abgeschlossen

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt *abgeschlossen*, wennn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Beispiel: In $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a, b]$ (kompaktes Intervall) abgeschlossen, jedes Intervall $(a, b]$ o.ä. ist nicht abgeschlossen, da a Häufungspunkt ist, jedoch nicht zum Intervall gehört.

Allgemeine Regeln:

1. Jeder Schnitt von abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen.
2. Jede Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen.
3. Die Menge H aller Häufungspunkte einer Teilmenge X ist abgeschlossen.

4. Die Menge H aller Häufungspunkte einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist abgeschlossen.
5. Bezeichne $\overline{X} := X \cup H$ (siehe 3.) als den Abschluß von X, er ist abgeschlossen. H ist *dicht* in X.

Beweis:

1. Sei $D := \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, $h \in H(D)$. Zu zeigen: $h \in D$. Es gilt: $D \subseteq A_i$, ein Häufungspunkt von D ist also automatisch ein Häufungspunkt von A_i, da aber alle A_i abgeschlossen sind, liegen die Häufungspunkte in A_i.
2. Sei $V := \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, $h \in H(V)$. Zu zeigen: $h \in V$. Annahme: $h \notin V$, dann folgt: $h \notin V \Rightarrow h \notin H(A_1), H(A_2), ...$ Dann existieren Umgebungen $U_1, U_2, ..., U_n$ von h, bei denen $U_i \cap A_i$ endlich ist. $U := \bigcap\limits_{i\in I} U_i$ ist Umgebung von h und $U \cap V$ endlich, damit ist $h \notin H(V)$.
3. Sei a ein Häufungspunkt von H. Zu zeigen: $a \in H$, d.h. a ist Häufungspunkt von X. Sei U ein Kreis um a. Dann existiert ein $h \in H$ mit $h \in U$. Es existiert ein Kreis V und H mit $V \subseteq U$. Da h Häufungspunkt von X ist, ist $|V \cap X| = \infty$ und insbesondere $|U \cap X| = \infty$.
4. Annahme: a Häufungspunkt von $\overline{X}$ und $a \notin \overline{X}$. Dann: $a \notin X$, $a \notin H$, also ist a kein Häufungspunkt von X und kein Häufungspunkt von H. Es existiert eine Umgebung U von a mit $U \cup X = \emptyset$ und eine Umgebung

V von a mit $V \cup H = \emptyset$. Dann ist $(U \cap V) \cap (X \cup H) = \emptyset$. Da $(U \cap V)$ jedoch eine Umgebung von a ist, ist der Schnitt wieder eine Umgebung von a, die aber keine Elemente enthält, also kann a kein Häufungspunkt von $\overline{X}$ sein!

9.9 Teilmenge eines Metrischen Raumes

VORAUSSETZUNG: M metrischer Raum; $X \subseteq M$. Jede Folge in X hat einen Häufungspunkt in X; BEHAUPTUNG: X ist beschränkt und abgeschlossen.

BEWEIS:

- Annahme X ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $d(x_n, x_j) \geq 42 \ \forall \ j < n$. Induktive Definition: Sind $x_1, ..., x_{n-1}$ gegeben, so ist $X \nsubseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} U_{42}(x_i)$. Wähle $x_n \in X$ so, daß $x_n \in U_{42}(x_j)$ für $j = 1, ..., n-1$. Damit hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt.
- Sei a Häufungspunkt von X. Zu zeigen: $a \in X$. Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, damit ist a der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist $a \in X$.

10 Stetige Funktionen

10.1

VORAUSSETZUNG: D, M metrische Räume (Hauptbeispiel: $M = \mathbb{R}$ und D kompaktes Intervall, also $[a, b]$). Betrachtet wird $f : D \to M$ im Punkt $a \in D$.
DEFINITION: f heißt stetig in a genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $d(x, a) < \delta$.

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \mid d(x, a) < \delta \quad : \quad d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Andere Formulierungen:

- Zu jedem Kreis U um $f(a)$ existiert ein Kreis V um a mit $f(V) \subseteq U$.
- Zu jeder Umgebung U von $f(a)$ existiert eine Umgebung V um a mit $f(V) \subseteq U$.
- Für jede Umgebung U von $f(a)$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(U) \subseteq D$ eine Umgebung von a.
- anschaulich: zu jedem ε existiert ein δ, so daß im Intervall $(a - \delta, a + \delta)$ alle Funktionswerte im Intervall $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ liegen.
- ganz anschaulich: die Funktion macht keinen Sprung

DEFINITION: f heißt stetig, wenn f in jedem $a \in D$ stetig ist.

Beispiel für eine nicht-stetige Funktion: Sei a gegeben. Sei $f(x) = 1$ für alle $x < a$, ansonsten $f(x) = 2$. Dann ist f an der Stelle a nicht stetig, da zu $\varepsilon = 0,5$ kein δ existiert, da $f(x)$ für alle $x > a$ gleich 2 ist.

10.2 Stetigkeit von Komposita

Jedes Kompositum $f \circ g$ von stetigen Funktionen ist stetig, genauer:

$$\left.\begin{array}{ll} f : D \to M & \text{stetig} \\ g : E \to D & \text{stetig} \end{array}\right\} f \circ g : x \mapsto f(g(x)) \text{ stetig}$$

BEWEIS: durch Kreise.

10.3 Lemma

VORAUSSETZUNG: D, M metrische Räume; $f : D \to M$ Abbildung, die in $a \in D$ **nicht** stetig ist.

BEHAUPTUNG: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} = a$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$

BEWEIS: f nicht stetig in a bedeutet: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \; \delta > 0 \; \exists \; x \in U_\delta(a)$ mit $f(x) \notin U_\varepsilon(f(a))$. Halte ε fest (sic!), Anwendung auf $\delta = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ liefert: $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

10.4 Folgenkriterium für Stetigkeit

VORAUSSETZUNG: D, M metrische Räume, $f : D \to M$, $a \in D$.

BEHAUPTUNG: Folgendes ist äquivalent:

(a) f ist stetig in a

(b) für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \; \forall \; (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

BEWEIS:

„$\Rightarrow$“ Sei U Umgebung von $f(a)$. Dann existiert eine Umgebung V von a mit $f(V) \subseteq U$. Für große n ist $x_n \in V$, also $f(x_n) \in f(V) \subseteq U$. Damit gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

„$\Leftarrow$“ Annahme: f ist nicht stetig in a. Wende (10.3) an und erhalte $\varepsilon > 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon \; \forall \; n$, das ist ein Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

10.5 Stetigkeit einer Summe etc. von Funktionen

VORAUSSETZUNG: D sei ein metrischer Raum und f, g Funktionen von D in $\mathbb{R}$, die in a stetig sind.

BEHAUPTUNG:

1. $f + g$ ist stetig in a
2. $f \cdot g$ ist stetig in a

3. $\frac{f}{g}$ ist stetig in a bei $g(x) \neq 0 \; \forall \; x$

Beweis: Folgt aus (10.4) und Konvergenzregeln für Folgen, als Beispiel:

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit Limes a.[14]

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(fg)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) \\ &= (\lim_{n\to\infty} f(x_n))\cdot(\lim_{n\to\infty} g(x_n)) \\ &= f(a)\cdot g(a) \\ &= f(\lim_{n\to\infty}(x_n))\cdot g(\lim_{n\to\infty}(x_n)) \\ &= (fg)(\lim_{n\to\infty}(x_n)) \end{aligned}$$

10.6 Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion f ist gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ für alle $x, a \in D$ mit $d(x, a) < \delta$.

$$\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, x, a \in D \mid d(x, a) < \delta \;:\; d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

D.h. im Prinzip, daß δ unabhängig von a gewählt werden kann. In $\mathbb{R}$ ist jede stetige Funktion auch gleichmäßig stetig (siehe (10.9)).

10.7 Folgenkompaktheit

Nenne einen metrischen Raum *folgenkompakt* genau dann, wenn jede Folge einen Häufungspunkt hat. Beweis mit (9.6) und (9.5). Damit folgt: Jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist folgenkompakt.

Satz: Voraussetzung: D, M seien metrische Räume und D folgenkompakt. Sei f eine stetige Funktion von D in M.

Behauptung: Die Bildmenge $f(D)$ ist ebenfalls folgenkompakt.

Beweis: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$. Dann existiert $x_n \in D$ mit $y_n = f(x_n)$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungspunkt $a \in D$. Es gibt eine Teilfolge $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes a (nach (9.5)). Da f stetig ist, folgt $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_{j_n})$ (Teilfolge von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$). Nach (10.4) ist $f(a)$ Häufungspunkt in $f(D)$ von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

[14] zum Beweis: „Erzählen Sie das nicht meinen Hiwis...“

10.8 Hilfssatz zum Umkehrsatz

SATZ: VORAUSSETZUNG: $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ monoton, $f(D)$ ist Intervall.

BEHAUPTUNG: f ist stetig (daraus folgt sofort (10.9).3).

BEWEIS: Annahme: f ist nicht stetig. Wende Hilfsats (sic!) (10.3) an. Erhalte $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $f(x_n) \notin U_\varepsilon(f(a))$, d.h. $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon \;\forall\, n$. Kann x_n monoton wählen. Nach (10.8.1) hat jede konvergente Folge reeller Zahlen hat eine monotone Teilfolge. Fallunterscheidungen:

1. f monoton wachsend.
   (a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
   Wähle u mit $f(a) - \varepsilon < u < f(a)$. Da $f(D)$ ein Intervall ist, existiert ein $x \in D$ mit $f(x) = u$. Es folgt: $x < a$. Wegen $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert ein m mit $x_m > x$, also folgt $f(x_m) \geq f(x) = u > f(a) - \varepsilon$, Widerpruch zur Stetigkeit.
   (b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Behauptung analog, Annäherung von oben an $f(a) + \varepsilon$.
2. f monoton fallend: wende Fall 1 auf die Funktion -f an, erhalte $-f$ stetig, also: f stetig.

10.8.1 monotone Teilfolge konvergenter Folgen

VORAUSSETZUNG: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahln.

BEHAUPTUNG: Es existiert eine monotone Teilfolge.

BEWEIS: Sei $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Es gilt mindestens einer der folgenden Fälle:

1. Es gibt eine streng monoton wachsende Teilfolge

oder 2. Es gibt eine streng monoton fallende Teilfolge

oder 3. Es existiert eine konstante Teilfolge a.

10.9 Hauptsätze über stetige reelle Funktionen

„Ankündigung: Jetzt wird's spannend...“

VORAUSSETZUNG: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig; $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. SATZ:

1. *Zwischenwertsatz:* $f(D)$ ist ein Intervall in $\mathbb{R}$.

2. *Satz vom Maximum und Minimum:* $f(D)$ hat ein Maximum und ein Minimum

1+2. Zusammenfassung: $f(D)$ ist kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$

3. *„Umkehrsatz“:* Ist f streng monoton (also injektiv), so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(D)$ nach $\mathbb{R}$ stetig

4. f ist sogar gleichmäßig stetig

1+3. gelten sogar für beliebige Intervalle.

Beweis:

1. Sei $a_1, b_1 \in D$ und $f(a_1) \le c \le f(b_1)$. Zu zeigen: $\exists\, u \in D : c = f(u)$. Fallunterscheidung:

$a_1 = b_1$ trivial

$a_1 < b_1$ Definiere Intervallschachtelung $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $a_n \le a_{n+1}$ und $b_n \ge b_{n+1}$ und $a_i < b_i$. Es gelte $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ und $c \in [a_n, b_n]$ für alle n.

Erstes Intervall bekannt, induktive Definition: Sei $m = \frac{b_n - a_n}{2} + a_n$ und

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } f(m) \ge c \\ [m, b_n] & \text{falls } f(m) \le c \end{cases}$$

Dann existiert (analog zu (9.6)) genau ein u mit $a_n \le u \le b_n$ für alle n. Es gilt: $u = \sup\{a_n \mid n\} = \inf\{b_n \mid n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Damit ist $f(u) = c$.[15]

$a_1 > b_1$ Es gilt: $-f(b_1) \le -c \le -f(a_1)$. Der vorhergende Fall wird angewandt auf $-f$ und $-c$ anstelle von f und c, und a_1 und b_1 anstelle von b_1 und a_1. Erhalte $u \in D$ mit $-c = (-f)(u) = -f(u)$.

2. $D = [a, b]$ ist folgenkompakt (nach (10.7)). Also $f(D)$ ist folgenkompakt (Satz (10.7))[16]. Nach (9.9) ist $f(D)$ beschränkt und abgeschlossen. Damit existieren Infimum und Supremum von $f(D)$, diese sind Häufungspunkte. Da das Intervall abgeschlossen ist, enthält die Menge ihr Supremum und ihr Infimum, damit existieren Maximum und Minimum.

3. Siehe (10.8).

[15] „Hat hier jemand in dieser Woche Geburtstag?“ $\to$ Kreisel

[16] „Wer war fleißig? Keiner... macht nichts, in Ihrem Alter war ich auch nicht fleißiger, ... heute auch nicht.“

4. Annahme: f nicht gleichmäßig stetig. Das bedeutet: es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ Elemente $x, a \in D$ existieren mit: $d(x, a) < \delta$ und $d(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$.

   Halte ε fest. Anwendung auf $\delta = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$ liefert Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D. mit $d(x_n, a_n) < \frac{1}{n}$ (*) und $d(f(x_n), f(a_n)) \geq \varepsilon$ (**). Es gilt: D ist folgenkompakt, da beschränkt und abgeschlossen. Also: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, ...$ mit $u = \lim_{n\to\infty} x_{j_n} \in D$. Wegen (*) ist auch $u = \lim_{n\to\infty} a_{j_n}$. Da f stetig ist, folgt: $f(u) = \lim_{n\to\infty} f(a_{j_n})$ (mit (10.4)). Zudem ist $f(u) = \lim_{n\to\infty} f(x_{j_n})$. Damit haben die beiden Folgen nicht für alle Folgenglieder den Abstand ε, das widerspricht(**)!

10.10 Anwendungen

1. Neuer Beweis für die Existenz von $\sqrt[n]{x}$ (bei $x \geq 0$): Das Bild der (stetigen!) Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}; f(x) := x^n$ ist das Intervall $\mathbb{R}_{\geq 0}$ [Zwischenwertsatz].

2. Die Umkehrfunktion von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) := \sqrt[n]{x}$ ist stetig [Umkehrsatz].

3. Ist $f : D \to \mathbb{R}(D \subseteq \mathbb{R}\text{Intervall})$ stetig und nimmt f einen positiven und einen negativen Wert an, dann auch den Wert 0 ($\exists\, x \in D mit f(x) = 0$).

   Beispiel: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ mit $a_i \in \mathbb{R}$; ist eine Polynomfunktion mit $a_n \neq 0$ und n ungerade[17].

   Erinnerung: Polynomfunktionen sind stetig!

4. $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, dann folgt: die Funktion hat einen Fixpunkt. Beweis: Wende 3. an auf eine neue stetige Funktion g mit $g(x) = f(x) - x$. Beachte: $g(a) \geq 0 \wedge g(b) \leq b$.

10.11 Eindeutigkeit von stetigen Fortsetzungen

Voraussetzung: $f, g : D \to M$ stetig (D, M metrische Räume), $X \subseteq D = \overline{X}$; $f = g$ auf X

Behauptung: $f = g$

Beispiel: D Intervall in $\mathbb{R}$, $X = D \cap \mathbb{Q}$

Beweis: Sei $u \in D$. Zu zeigen: $f(u) = g(u)$. Sei $u \notin X$. Das impliziert

[17] „Weiß jeder, was eine ungerade natürliche Zahl ist?“

$u \in H(X)$. Es folgt: Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = u$. Mit (10.4) ergibt sich: $f(u) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Zudem $g(u) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$, da $f(x_n) = g(x_n)$ folgt: $f(u) = g(u)$.

11 Konvergenz, Differenzierbark. v. Funktionen

11.1 Vorbemerkung

Man kann eine Folge $f_1, f_2, ...$ reeller Zahlen als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ auffassen ($f(n) := f_n$).

VERALLGEMEINERUNG: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und D nach oben unbeschränkt. Alle Konvergenzdefinitionen und Regeln bleiben gültig.

11.2 Stetigkeit in einem Punkt

VORAUSSETZUNG: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und D nach oben unbeschränkt.

DEFINITION: Folgendes sei äquivalent:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$
- Zu jeder Umgebung U von b existiert ein $m \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \in U \;\forall\, x \in D$ mit $x > m$
- $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, m \in \mathbb{R} \;\forall\, x \in D | x > m \;:\; d(f(x), b) < \varepsilon$

Varianten:

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (D nach unten unbeschränkt) $\forall\, x \in D$ mit $x < m$
2. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (D unbeschränkt) $\forall\, x \in D$ mit $|x| > m$
3. Hauptvariante: $\lim_{x\to a} f(x)$ wobei a Häufungspunkt von D

Explizite Definition: Schreibe

$$\lim_a f = \lim_{x\to a} f(x) = b :\Leftrightarrow \forall U(b) \exists V(a) : f(V \setminus \{a\}) \subseteq U$$

(und $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < d(f(x), b) < \varepsilon \forall x \in D : d(x, a) < \delta$). Diese Definition gilt für Funktionen zwischen beliebigen metrischen Räumen.

Gleichwertig: Die Funktion $\hat{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \neq a \\ b & \text{falls} \quad x = a \end{cases}$ ist stetig in a.

Also: $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ ist äquivalent zu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

11.2.1 Widerholungen

Folgende (Haupt)regeln gelten weiterhin:

1. Es existiert höchstens ein Grenzwert
2. $\lim f + g = \lim f + \lim g$
3. $\lim f \cdot g = \lim f \cdot \lim g$
4. $\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$ (bei $\lim g \neq 0$)[18]
5. Folgenkriterium für Stetigkeit überträgt sich

11.2.2 Variationen von „b“

Exemplarische Definition: $\lim_{x\to a} f(x) \to \infty :\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R} : |f(x)| > \varepsilon \; \forall\, x \in D : |x - a| < \delta$.

Hauptregel: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

11.3 Konvergenzregel für Komposita von Funktionen

Voraussetzung: Seien

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} & g &: E \to \mathbb{R} \\ D &\subseteq \mathbb{R} & f&(D) \subseteq E \subseteq R \\ a &\in H(D) & b &\in H(E) \\ \lim_{x\to a} f(x) &= b & \lim_{x\to b} & g(x) = c \\ f(a) = b \text{ falls } a &\in D & g(b) &= c \text{ falls } b \in E \end{aligned}$$

Satz: $\lim_{a} g \circ f = c$. Beweis: Folgt direkt aus (10.2) und den Sätzen oben.

11.3.1 alternative Darstellung mit $h \to 0$

Voraussetzung: D Intervall von $\mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$, $b \in \mathbb{R}$

Behauptung: $b = \lim_{x\to\infty} ag(x) \Leftrightarrow b = \lim_{h\to 0} g(a + h)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|g(x) - b| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x - a| < \delta$. Für alle $h \neq 0$ mit $|h| < \delta$ folgt (Anwendung auf $h = x - a$, d.h. $x = a + h$): $|g(a + h) - b| < \varepsilon$. Also $\lim_{h\to 0} g(a + h) = b$.

[18] „Alles muß vorausgesetzt werden, ohne was die Geschichte hier nicht sinnvoll wäre.“ - Dürfen wir die Formulierung auch in Übungsaufgaben benutzen?

11.4 Differenzierbarkeit, Ableitung

VORAUSSETZUNG: $f : D \to \mathbb{R}$ mit D Intervall, Länge $\neq 0$. $a \in D$.

VORBEMERKUNG: Für $a \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = u$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = u$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - u = 0$

DEFINITION: f heißt *differenzierbar in a*, genau dann wenn ein u existiert, für das eben genannte Gleichungen gelten.

ACHTUNG: Definitionsbereich der Funktion $g : h \to \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ist die Menge H aller h mit $h \neq 0$ und $a + h \in D$. Zudem ist 0 Häufungspunkt von H.

Eindeutigkeit: u ist, falls existent, eindeutig bestimmt.

Bezeichnung: $f'(a) := u$.

DEFINITION: f differenzierbar $:\Leftrightarrow$ f differenzierbar in a für alle $a \in D$. Erhalte dann eine neue Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ als *Ableitung von f*.

VERANSCHAULICHUNG: Die Ableitung in einem Punkt ist die „Steigung“ (der Tangenten) in diesem Punkt; Physik: wenn $f(t)$ eine Ortsfunktion abhängig von der Zeit ist, gibt $f'(t)$ die Momentangeschwindigkeit zur Zeit t. Die zweite Ableitung $f''(t)$ gibt die Beschleunigung[19] zum Zeitpunkt t an.

11.4.1 ψ als Differenzienquotient

Gleichwertig zur Differenzierbarkeit von a ist: Es existiert ein $u \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\psi : H \to \mathbb{R}$ mit $f(a+h) - f(a) = h \cdot u + h \cdot \psi(h)$ und $\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0$ für alle $h \in H$.

Es genügt: $\psi : H_0 \to \mathbb{R}$ wobei $H_0 = H \cap U_\varepsilon(0)$ für geeignetes $\varepsilon > 0$ (dabei ist $u = f'(a)$).

11.4.2 Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

SATZ: Aus f diff. in a folgt: f ist stetig in a.

[19] „Wenn Sie sich ’n Auto kaufen, und da steht was von ner Beschleunigung von 1 auf 100 in einer Sekunde...“

Beweis:

$$\begin{aligned} & f \text{ stetig in } a \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a) \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lim_{h\to 0}(hu + h\psi(h)) = 0 \end{aligned}$$

11.4.3 Beispiele

1. Aus f konstant folgt: $f'(a) = 0 \ \forall\ a \in D$
2. $f(x) = x \ \forall\ x \in D$, dann folgt: $f'(a) = 1 \ \forall\ a \in D$

11.4.4 n-te Ableitung

Bezeichnung: Sei $f^{(1)} := f'$ und $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.

11.5 Regeln

Voraussetzung:

- $f(a+h) - f(a) = hu + h\psi_1(h)$ bei $u = f'(a)$ und $\lim_{h\to 0}\psi_1(h) = 0$
- $g(a+h) - g(a) = hv + h\psi_2(g)$ bei $v = g'(a)$ und $\lim_{h\to 0}\psi_2(h) = 0$

Dann gelten folgende Regeln[20]:

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(kf)' = k(f'), k \in \mathbb{R}$
3. $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
4. $(\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2}$
5. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ (Quotientenregel)
6. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) (und per Nachtrag auch für $n \in -\mathbb{N}$!)
7. $(g \circ f)' = (g(f))' = g'(f) \cdot f'$ (Kettenregel)

[20]kleiner Vor-/Seitengriff: Differenzierbare Funktionen bilden einen Vektorraum, die Ableitung ist eine lineare Abbildung

BEWEIS:

1. $f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a)) = h(u+v)+h(\psi_1(h)+\psi_2(h))$
   Also: $f+g$ differenzierbar in a und $(f+g)'(a) = u+v$

2. $kf(a+h)-kf(a) = hku+hk\psi_1(h)$

3. $$\begin{aligned} A &:= [f(a)+hu+h\psi_1(h)] \\ B &:= [g(a)+hv+h\psi_2(h)] \\ (f\cdot g)(a+h) &= AB \\ &= (f\cdot g)(a)+h(f(a)v+ug(a))+h(B\psi_1(h)+A\psi_2(h)) \\ &\to (f\cdot g)(a)+h(f(a)v+ug(a))+h(f(b)\cdot 0+f(a)\cdot 0) \end{aligned}$$

   Also: $f\cdot g$ ist differenzierbar in a mit Ableitung $f(a)v+ug(a)$.

4. $$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h} &= \frac{1}{h}\cdot\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)\cdot g(a)} \\ &= -\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\cdot\frac{1}{g(a+h)\cdot g(a)} \\ &\to -g'(a)\cdot\frac{1}{g(a)^2} \end{aligned}$$

5. Wende die Produktregel an:
   $$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \\ &= f'\cdot\frac{1}{g}+f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' \\ &= f'\cdot\frac{g}{g^2}+f\cdot\frac{-g'{}'}{g^2} \\ &= \frac{f'g-fg'}{g^2} \end{aligned}$$

6. Induktion nach n; *Verankerung*: Für $n=1$ bereits gezeigt, daß $x' = 1 = 1x^0$ ist. *Annahme*: Die Behauptung ist richtig für x^{n-1}. *Schluß*:
   $$\begin{aligned} x^n &= x^{n-1}\cdot x \\ &= ((n-1)\cdot x^{n-2}\cdot x)+(1\cdot x^{n-1}) \\ &= ((n-1)+1)\cdot(x^{n-1}+x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Zweiter Beweis: Betrachte den Differenzienquotient $\frac{x^n-a^n}{x-a}$. Mit Hilfsformel $x^n - a^n = (x-a)\cdot(x^{n-1}a^0 + x^{n-2}a^1 + \cdots + x^1a^{n-2} + x^0a^{n-1})$ folgt: $\frac{x^n-a^n}{x-a} = \sum_{i=0}^{n} x^i a^{n-i-1}$. Für $x \to a$ geht die Summe gegen $n \cdot a^{n-1}$.

Nachtrag: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, damit $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)}$

7. VORAUSSETZUNG:

   - f, D, a wie eben; g, E, b analog
   - $f(D) \subseteq E$, $f(a) = b$
   - f in a und g in b differenzierbar
   - $f(a+h) - f(a) = hu + h\psi_1(h)$ bei $u = f'(a)$ und $\lim_{h\to 0}\psi_1(h) = 0$
   - $g(a+l) - g(a) = lv + l\psi_2(g)$ bei $v = g'(a)$ und $\lim_{l\to 0}\psi_2(l) = 0$

   BEWEIS: Setze $l(h) := h \cdot u + h\psi_1(h)$, damit $\lim_{h\to 0} l(h) = 0$. Also:

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= b + l(h)\\
(g\circ f)(a+h) &= g(f(a+h))\\
&= g(b + l(h))\\
&= g(b) + l(h)\cdot v + l(h)\psi_2(l(h))\\
&= (g\circ f)(a) + l(h)\cdot v + l(h)\psi_2(l(h))\\
(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) &= huv + h(\psi_1(h)v + \frac{l(h)}{h}\cdot\psi_2(l(h)))\\
&\to huv + h(0 + (u+0)\cdot 0)\\
&\to huv
\end{aligned}$$

   Also: $g\circ f$ ist differenzierbar mit $(g\circ f)' = uv$.

   Beispiele:

   (a) $f(x) = x^n; (g(x^n))' = g'(x)\cdot n\cdot x^{n-1}$
   (b) $g(x) = x^n; ((f(x))^n)' = n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$

11.5.1 Ableitung von Polynom- und rationalen Funktionen

- Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist differenzierbar mit $f' = \sum_{i=1}^{n} i\cdot a_i\cdot x^{i-1}$.
- Eine Polynomfunktion ungleich 0 hat nur endlich viele Nullstellen (Anzahl $\leq n$).

- Jede rationale Funktion $\frac{f}{g}$ (mit f, g Polynomfunktionen) ist differenzierbar, Definitionsbereich: $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$

11.5.2 Ableitung der Umkehrfunktion

Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}$, a Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a und streng monoton (also injektiv), $f'(a) \neq 0$; sei $g : f(D) \to \mathbb{R}$ mit $g : f(x) \mapsto x$ stetig in $b = f(a)$ (Bemerkung: aus $f(D)$ ist Intervall folgt nach (10.8) schon: g ist stetig).

Behauptung: g ist differenzierbar in b mit $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, zudem $(**)$: b ist Häufungspunkt von $f(D)$.

Beweis: Für die Funktion $\varphi : D \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ gilt: $\lim\limits_{a} \varphi = f'(a)$ und $\varphi(x) \neq 0 \; \forall \, x \neq a$.
Wegen $\lim\limits_{b} g = g(b) = a$ folgt: $\lim_{y \to b} \varphi(g(y)) = f'(a)$ (nach (11.3)), also $\lim_{y \to b} \frac{1}{\varphi(g(y))} = \frac{1}{f'(a)}$ (nach (11.2)).
$\frac{g(y)-a}{f(g(y))-f(a)} = \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$, also $\frac{1}{f'(a)} = \lim_{y \to b} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}$, also $f'(a) = g'(b)$.
Beweis von $(**)$: Sei U Umgebung von b (in $\mathbb{R}$). Es existiert eine Umgebung von a mit $f(D \cap V) \subseteq U$ (da f stetig in a ist und $b = f(a)$ (11.4)). Da a Häufungspunkt von D, ist $|V \cap D| = \infty$, also $|f(V \cap D)| = \infty$ (da f injektiv). Damit ist $|U \cap f(D)| = \infty$.

11.5.3 Differenzierbarkeit der Wurzelfunktionen

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$; $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ differenzierbar mit $g'(x) = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}$, andere Formulierung: $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

Beweis: Wende (11.5.2) an mit $f(x) = x^n$, $b = f(a) = a^n$. Für $a \in D$ ist $f'(a) = na^{n-1} \neq 0$. Erhalte $g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}(b^{\frac{1}{n}})^{-(n-1)} = \frac{1}{n} b^{\frac{-n-1}{n}}$

11.5.4 Differenzierbarkeit von Potenzfunktionen

Satz: Für jede rationale Zahl $q \neq 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $x \mapsto x^q$ differenzierbar mit $f'(x) = qx^{q-1}$.

Beweis: Schreibe $q = \frac{m}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Also: $f(x) = (x^{\frac{1}{n}})^m$. Nach Kettenregel: $f'(x) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot (x^{\frac{1}{n}})' = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot (x^{\frac{1}{n}-1}) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$

12 Differenzierbare reelle Funktionen auf einem Intervall

VORAUSSETZUNG: $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar (also stetig).

12.1 Ableitung an lokalen Maxima/Minima

DEFINITION: f hat ein lokales Maximum in $x_0 \in D$, falls gilt: es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(x_0) \; \forall \, x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

DEFINITION: f hat ein lokales Minimum in $x_0 \in D$, falls gilt: es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f(x) \geq f(x_0) \; \forall \, x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.

SATZ: Ist x_0 innerer Punkt von D und $f(x_0)$ lokales Maximum oder Minimum, so ist $f'(x_0) = 0$.

BEWEIS: Es gilt: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ (da x_0 innerer Punkt). Fallunterscheidung:

1. lokales Minimum: ε kann so gewählt werden, daß $f(x_0) \leq f(x) \; \forall \, x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$. Für $x > x_0$ ist $\varphi(x) \geq 0$, für $x < x_0$ ist $\varphi \leq 0$, also $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

2. lokales Maximum: analog

12.2 Satz von Rolle

VORAUSSETZUNG: $D = [a, b]$ (wobei $a < b$) mit $f(a) = f(b)$.

BEHAUPTUNG: Es existiert x_0 mit $a < x_0 < b$ mit $f'(x_0) = 0$.

BEWEIS: Fallunterscheidung

1. Die Funktion ist konstant: $f' = 0$

2. Die Funktion ist nicht konstant. $f(D)$ hat ein Maximum und ein Minimum (nach (10.9)), es existiert ein $x_0 \in D$ mit $f(a) < f(x_0) = \max(f(D))$ oder $f(a) > f(x_0) = \min(f(D))$. Dann $a \neq x_0 \neq b$, f hat ein lokales Maximum oder Minimum.

12.3 Mittelwertsatz

Sei $D = [a, b]$ mit $a < b$. BEHAUPTUNG: Es existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. (Spezialfall ist (12.2)).

Beweis: Sei $F : D \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x) - (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dann $F(a) = f(a) = F(b)$. Der Satz von Rolle (12.2) liefert: es existiert $x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = 0$. Die Ableitung ist: $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1$.

12.4 konstante Funktion $\Leftrightarrow$ Ableitung null

Satz: $f' = 0 \Rightarrow f$ ist konstant für Funktionen auf einem Intervall.

Beweis: Wende (12.3) an auf beliebige $a, b \in D$ an mit $a < b$, erhalte $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, d.h. $f(b) = f(a)$.

12.5 Funktionen mit gleicher Ableitung

Voraussetzung: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f' = g'$.

Satz: Es existiert ein $k \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + k \; \forall \, x \in D$.

Beweis: Nach (12.4) ist $f - g$ konstant ($(f-g)' = f' - g' = 0$).

12.6 Monotoniekriterium

Behauptung:

1. $f' > 0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend
2. $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
3. $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend
4. $f' < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend

Beweis:

1. Annahme, f sei nicht streng monoton wachsend. Dann exisiteren $a, b \in D$ mit $a < b$ und $f(a) \not< f(b)$. Erhalte aus dem Mittelwertsatz $x_0 \in (a,b)$ mit $0 < f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$
2. analog zu 3.
3. „$\Rightarrow$“ analog zu 1.

   „$\Leftarrow$“ Für jedes $a \in D$ ist $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \; \forall \, (x < a) \vee (x > a)$, damit ist auch der Limes ≥ 0.
4. analog zu 1.

12.7 Der Satz von Taylor

VORAUSSETZUNG: $a, b \in D, a < b, a \neq b, f^{(n)}$ existiert

BEHAUPTUNG: $\exists\, x_0, a < x_0 < b$ mit

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Der Spezialfall $n = 1$ ist der Mittelwertsatz:

$$f(b) = f(a) + 0 + \frac{b-a}{1} f'(x_0)$$

Der Spezialfall $n = 2$:

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(x_0)$$

BEWEIS: Definiere $k \in \mathbb{R}$ so, dass $f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} k$.
Zu zeigen: es existiert x_0 mit $k = f^{(n)}(x_0)$. Definiere neue Funktion F:

$$F(x) := -f(b) + f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-x)^i}{i!} f^{(i)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} k$$

Diese[21] Funktion ist offensichtlich differenzierbar[22]:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-(b-x)^{i-1}}{(i-1)!} f^{(i)}(x) + \frac{(b-x)^i}{i!} \cdot f^{(i+1)}(x) \right) + \frac{-(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} k \\
&= f'(x) + \left(-f'(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \right) + \frac{-(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} k \\
&= \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left(f^{(n)}(x) - k \right)
\end{aligned}$$

$F(a) = 0 = F(b)$, wende Satz von Rolle an: es existiert x_0 mit $F'(x_0) = 0$, d.h. $f^{(n)}(x_0) - k = 0$, d.h. wie gewünscht ist $f^{(n)}(x_0) = k$.

[21] Er fängt heute wieder an, an der Antenne zu zupfen...

[22] „... das einzige, was nicht von dem Summanden links getötet oder aufgefressen wird, ist..."

12.8 Kennzeichnung lokaler Extrema

VORAUSSETZUNG: $a \in D$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ exisitert und ist stetig (stetig in a genügt), $f^{(i)}(a) = 0$ für $i \in \{1, ..., n-1\}$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.

BEHAUPTUNG:

1. Aus n ungerade und a innerer Punkt von D folgt. f hat kein lokales Maximum oder Minimum in a.

2. Aus n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$ folgt: lokales Minimum

3. Aus n gerade und $f^{(n)}(a) < 0$ folgt: lokales Maximum

BEWEIS: Aus der Stetigkeit von $f^{(n)}$ in a folgt: es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $f^{(n)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n)}(x) < 0$ (je nachdem, ob $f^{(n)}(a)$ größer oder kleiner 0) für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \varepsilon$.

Darf also annehmen: $f^{(n)}(x) > 0 \; \forall \; x \in D$ oder $f^{(n)}(x) < 0 \; \forall \; x \in D$. Wende die Taylor-Formel (12.7) an: $f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$.

1. Annahme: $f^{(n)} > 0$ (anderer Fall analog). Dann ist $f(b) - f(a) > 0$ für $b > a$ bzw. $f(b) - f(a) < 0$ für $b < a$ (es existiert für beide Fälle ein b).

2. $f(b) - f(a) > 0 \; \forall \; b$, damit $f(b) > f(a)$, damit $f(a)$ lokales Minimum

3. $f(b) - f(a) < 0 \; \forall \; b$, damit $f(b) < f(a)$, damit $f(a)$ lokales Maximum

13 Exponentialfunktion und Logarithmus

13.1 Haupsatz: Exponentialfunktion

VORAUSSETZUNG: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, E' = E, E(0) = 1$

1. es gibt nur eine Funktion E
2. E ist streng monoton wachsend
3. $E(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$
4. $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$
5. $E(-x) = E(x)^{-1}$

Bezeichnung: $e := E(1)$, $\exp x = e^x = E(x)$.

13.1.1 Vorbemerkung (Menge der Nullstellen)

VORAUSSETZUNG: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $X := \{x \in D \mid f(x) = 0\}$.

BEHAUPTUNG: X ist abgeschlossen in D, Folgerung: für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $\inf X_{\geq r} \in X$, falls $X_{\geq r} \neq \emptyset$.

BEWEIS: Sei a Häufungspunknt von X. Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a = \lim_{n\to\infty}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $f(a) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

13.1.2 Beweis des Hauptsatzes (Teil 1)

VORAUSSETZUNG: D Intervall, $E(x) \neq 0 \;\forall\, x \in D$. BEHAUPTUNG:

1. $G : D \to \mathbb{R}$, $G' = G \Rightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = k \cdot E(x) \;\forall\, x \in D$
2. $E(a + x) = E(a) \cdot E(x) \;\forall\, x \in D, a \in R$
3. $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \;\forall\, x \in D$

BEWEIS:

1. betrachte $\frac{G}{E} : D \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{G(x)}{E(x)}$. Es gilt:

$$\left(\frac{G}{E}\right)' = \frac{G'E - GE'}{E^2} = \frac{EE' - EE'}{E^2}0$$

   Damit ist $\frac{G}{E}$ konstant

2. Für festes a: Wende 1) an auf $G(x) = E(a+x)$. Klar: $G'(x) = E'(a+x) \cdot 1 = E(a+x) = G(x)$. Erhalte $E(a+x) = k \cdot E(x) \;\forall\, x \in D$. Durch $x = 0$ erhält man: $E(a) = E(a+0) = k \cdot E(0) = k$

3. $1 = E(x-x) = E(-x) \cdot E(x) \Rightarrow E(-x) = E(x)^{-1}$

13.1.3 Beweis des Hauptsatzes (Teil 2)

Behauptung: $E(x) > 0 \;\forall\, x \geq 0$

Beweis: Annahme: $\exists\, x \geq 0$ mit $E(x) \leq 0$.

1. E hat eine Nullstelle $a \geq 0$, denn $E(0) = 1 > 0$, E stetig, Zwischenwertsatz.

2. Wähle die Nullstelle minimal (nach (13.1.1)), $a \neq 0$ wegen $E(0) = 1$

3. $E(x) > 0 \;\forall\, x \in [0, a)$

4. Wende (13.1.2) an auf $D = [0, a)$. Erhalte $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \neq 0 \;\forall\, x$ mit $0 \leq x < a$

5. $D := (-a, a)$ ist wie in (13.1.2)

6. $\exists\, x \in D$ mit $a + x \in D$ (setzte einfach $x := -\frac{a}{2}$)

7. Wende (13.1.2) an: Erhalte $0 \neq E(a+x) = E(a) \cdot E(x) = 0 \Rightarrow 0 \neq 0$

13.1.4 Beweis des Hauptsatzes (Teil 3)

Behauptung: $E(x) > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ (nicht nur für positive x)

Wende (13.1.2) an mit $D = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Erhalte $E(-x) \neq 0 \;\forall\, x \in D$

13.1.5 Beweis des Hauptsatzes (Teil 4)

Behauptung: $E'(x) > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ (da $E' = E$), E streng monoton wachsend, $E(\mathbb{R}) = \varepsilon_{\geq 0}$ hä?

Beweis: Wende die Taylorformel (12.7) an mit $a = 0, f = E, n = 2$, erhalte für $x > 0$:

$$\begin{aligned} E(x) &= E(0) + xE'(0) + \frac{1}{2}x^2 E''(x_0) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 E''(x_0) \\ &> x \end{aligned}$$

$E(\mathbb{R})$ ist Intervall (nach Zwischenwertsatz), $R_{\geq 1} \subseteq E(\mathbb{R})$ und $(R_{\geq 1})^{-1} \subseteq E(\mathbb{R})$

13.2 Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion $L : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $E(x) \to x$ ist differenzierbar ((11.5.2)) mit $L'(x) = \frac{1}{x}$. Standardbezeichnung: $\log x := L(x)$. Regel: $\log uv = \log u + \log v$.

Beweis: Wende (11.5.2) an: $a \in \mathbb{R}$, $b = E()a)$. Erhalte $L'(b) = \frac{1}{E(a)} = \frac{1}{b}$. Schreibe $u = E(x), v = E(y)$. Dann ist nach (13.1): $uv = E(x+y)$, also $\log uv = x + y = \log u + \log v$.

13.3 beliebige Exponentialfunktionen

Zu $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\alpha : x \mapsto E(\log a \cdot x)$, mit der Eigenschaft $\alpha(q) = a^q \ \forall \ q \in \mathbb{Q}$. Sie ist differenzierbar mit $\alpha'(x) = \log a \cdot \alpha(x)$. Standardbezeichnung: $a^x := \alpha(x)$, insbesondere: $e^x = E(x)$.

Die Ableitung der Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $a^x \mapsto x$ (Logarithmus zur Basis a) ist differenzierbar mit der Ableitung $x \mapsto \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x}$. Regeln:

1. α ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$.
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
5. $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$
6. $\log_a u^y = y \cdot \log_a u$
7. $\alpha(mx) = \alpha(x)^m \ \forall \ m \in \mathbb{Z}$

Beweis: Nach (10.11) exisitert höchstens ein α. Definiere $\alpha := E(x \cdot \log a)$. Nach Kettenregel: $\alpha' = E(x \cdot \log a) \cdot \log a$, da α differnzierbar ist, ist sie auch stetig.

Regeln:

1. Definiere $\alpha = E \circ A$ mit $A : x \mapsto x \cdot \log a$, diese ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
2. $A(x+y) = A(x) + A(y)$
3. $(a^x)^y = E \cdot (y \cdot \log a^x) = E \cdot (x \cdot y \cdot \log a) = a^{(xy)}$

4. $(ab)^x = E(x \cdot \log ab) = E((\log a + \log b) \cdot x) = E(x \cdot \log a) \cdot E(x \cdot \log b) = a^x \cdot b^x$

5.

6. $\log a^x = \log \alpha(x) = x \cdot \log a$

13.4 Ableitung verketteter Exponentialfunktionen

Voraussetzung: $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x) > 0 \; \forall \, x \in D$.

Behauptung: Die Funktion $B(x) = f(x)^{g(x)}$ ist differenzierbar mit

$$B'(x) = B(x) \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + \log f(x) \cdot g'(x) \right)$$

Beispiel:

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$
2. $(x^x)' = x^x \cdot (1 + \log x)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
B(x) &= f(x)^{g(x)} \\
&= (e^{\log f(x)})^{g(x)} \\
&= E(g(x) \cdot \log f(x)) \\
&= E'(g(x) \cdot \log f(x)) \\
&= E(g(x) \cdot \log f(x)) \cdot ((\log f(x))' \cdot g(x) + g'(x) \cdot \log f(x)) \\
&= B(x) \cdot (\log' f(x) \cdot f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot \log f(x)) \\
&= B(x) \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + g'(x) \cdot \log f(x) \right)
\end{aligned}$$

13.5 Limesdarstellung von e^x

Für jedes $x > 0$ gilt:

1. $\lim_{h \to 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} = e^x$
2. $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$
3. $f(h) = (1 + xh)^{\frac{1}{h}}$ streng monoton fallend

4. $g(h) = (1 + \frac{x}{n})^n$ streng monoton wachsend

Beweis:

1. Setze $a := \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{a} &= \log'(a) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} \\ e^x &\overset{(11.3)}{=} \lim_{h \to 0} e^{\frac{\log(a+h) - \log a}{h}} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{\log(a+h)}}{e^{\log a}} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{a+h}{a} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{a} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \to 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

2. Folgt aus $\lim_{n \to 0} \frac{1}{n} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen:

$$\exists\, r > 0 \text{ mit } |f(n) - e^x| < \varepsilon$$

Es existiert $\delta > 0$ mit $|f(h) - e^x| < \varepsilon\ \forall\, h$ mit $|h| < \delta$. Also: $r = \frac{1}{\delta}$ ist dann wie gewünscht, denn $n > r \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{r} = \delta$.

3. kommt noch

4. gleichwertig zu eben

$$
\begin{aligned}
x = \frac{1}{a} \quad &= \quad \log'(a) \\
&= \quad \lim_{h\to 0} \frac{\log(a+h) - \log a}{h} \\
e^x \quad &\overset{(11.3)}{=} \quad \lim_{h\to 0} e^{\frac{\log(a+h)-\log a}{h}} \\
&= \quad \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{\log(a+h)}}{e^{\log a}} \right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \quad \lim_{h\to 0} \left(\frac{a+h}{a} \right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \quad \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{a} \right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \quad \lim_{h\to 0} (1 + xh)^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}
$$

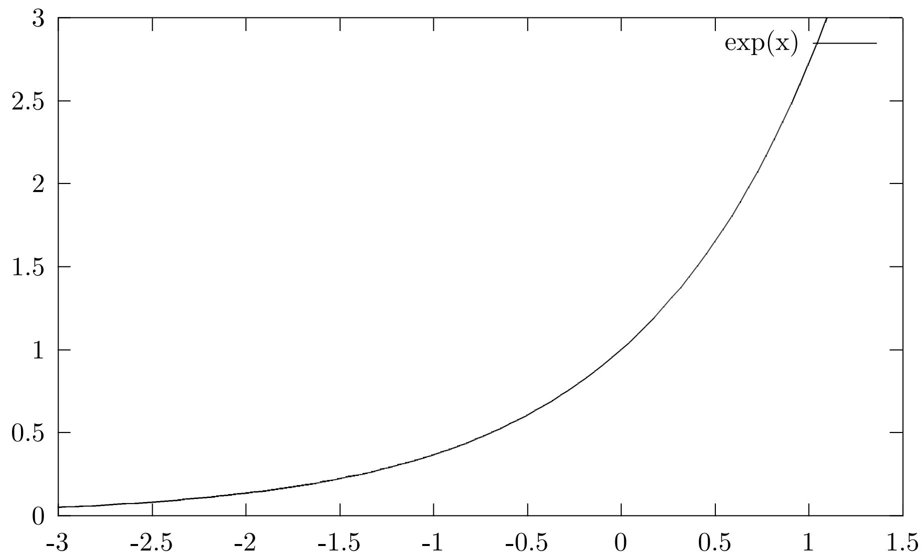
13.6 Annäherung an e

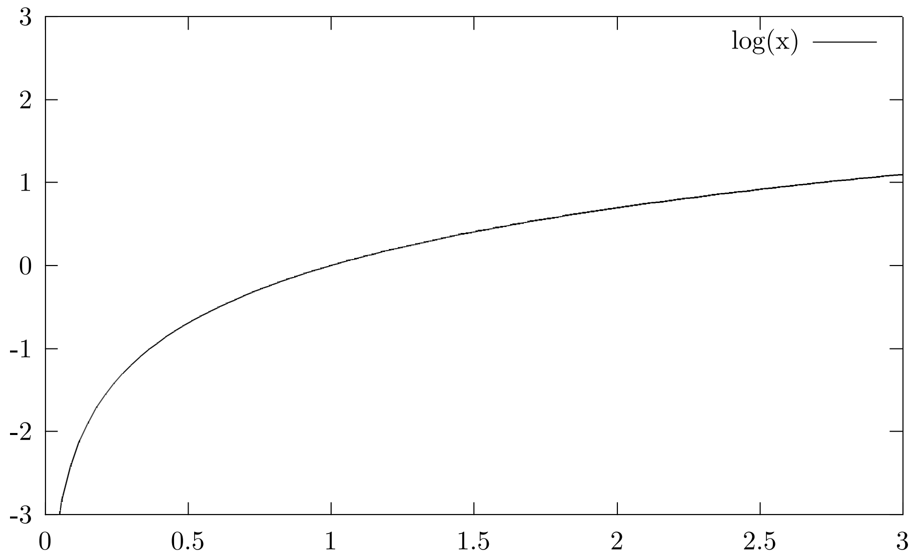
Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $S_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$. Für $x > 0$ gilt: $S_n < e^x$ und $(1 - \frac{x^n}{n!}) \cdot e^x < S_{n-1}$ (für $n \geq 2$). Beispiel: $x = 1$, $n = 2 : 2{,}5 < e < 4$, $n = 4 : 2{,}7 < e < 2{,}75$, ... Beweis: Wende die Taylorformel (12.7) an:

$$
f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)
$$

$$
E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}
$$

13.7 Graphen





Es gilt offensichtlich:

- $(e^x)'$ monton wachsend, $(e^x)'' \geq 0 \; \forall \, x$
- $(\log x)'$ monton fallend, $(\log x)'' \leq 0 \; \forall \, x$

14 Sinus und Cosinus

Beachte Funktionen

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad C : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ S' = C & \qquad C' = -S \\ S(0) = 0 & \qquad C(0) = 1 \\ \sin x := S(x) & \qquad \cos x := C(x) \end{aligned}$$

14.1 Hilfssatz

VORAUSSETZUNG: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f' = g, g' = -f$

BEHAUPTUNG: $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ mit $gS - fC = a$ und $fS + gC = b$

BEWEIS:

$$\begin{aligned} (gS - fC)' &= gS' + g'S - fC' - f'C \\ &= gC - fS + fS - gC \\ &= 0 \\ (fS + gC)' &= fS' + f'S + gC' + g'C \\ &= fC + gS - gS - fC \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also: $gS - fC$ und $fS + gC$ sind konstant.

14.2 Hilfssatz $\sin^2 + \cos^2 = 1$

BEHAUPTUNG: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$

BEWEIS: Wende (14.1) an mit $f = S$ und $g = C$. Erhalte $b = f(0) \cdot S(0) + g(0) \cdot C(0) = 1$, b ist konstant, damit: $S(x)^2 + C(x)^2 = b = 1$

Folgerung: $-1 \leq S(x) \leq 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ und $-1 \leq C(x) \leq 1 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$.

14.3 Hilfssatz

BEHAUPTUNG: $g = aS + bC$ und $f = bS - aC$ mit $a = -f(0)$ und $b = g(0)$

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
aS &= (gs - fC)S = gS^2 - fCS \\
bC &= (fS + gC)C = fSC + gC^2 \\
aS + bC &= g(S^2 + C^2) = g \\
bs &= (fS + gC)S = fS^2 + gCS \\
aC &= (gS - fC)C = gSC - fC^2 \\
bs - aS &= f(S^2 + C^2) = f
\end{aligned}$$

14.4 Hilfssatz

VORAUSSETZUNG: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f' = g$, $g' = -f$, $f(0) = 0$, $g(0) = 1$

BEHAUPTUNG: $f = S$ und $g = C$

BEWEIS: Wende (14.3), $a = 0$, $b = 1$.

14.5 (un)gerade Funktionen sin/cos

BEHAUPTUNG:

- $\sin -x = -\sin x$ (sin ist eine *ungerade Funktion*)
- $\cos -x = \cos x$ (cos ist eine *gerade Funktion*)

BEWEIS: Wende (14.3) an mit $f(x) = -S(-x)$ und $g(x) = C(-x)$

$$\begin{aligned}
f(0) = 0 &\qquad a = 0 \\
g(0) = 1 &\qquad b = 1 \\
f(x) &= bS(x) - aC(x) \\
&= S(x) \\
g(x) &= aS(x) + bC(x) \\
&= C(x)
\end{aligned}$$

14.6 Additionstheorem

BEHAUPTUNG:

- $\sin x + y = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- $\cos x + y = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

BEWEIS: Wende (14.3) an für festes $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = S(x+y)$ und $g(x) = C(x+y)$, erhalte

$$\begin{aligned} g(x) &= aS(x) + bC(x) \\ f(x) &= bS(x) - aC(x) \\ \text{mit } a &= -f(0) = -S(y) \\ b &= g(0) = C(y) \end{aligned}$$

14.7 positive Nullstelle

BEHAUPTUNG: Sei $D := [0,2]$. $C(D)$ hat eine Nullstelle.

DEFINITION von $\pi \in \mathbb{R}$: $\frac{\pi}{2}$ sei die kleinste Nullstelle ≥ 0 (mit (13.1.1)).

BEWEIS: Annahme: $C(x) > 0 \; \forall \, x \in D$. Wegen $S' = C$ ist S streng monoton wachsend auf D. Für $x > 0$ folgt: $S(x) > S(0) = 0$.

Wende Taylorformel$_2$ (12.7) an: Es exisitiert ein $x_0 \in (1,2)$ mit

$$\begin{aligned} C(2) &= C(1) + C'(1) + \frac{1}{2}C''(x_0) \\ &= C(1) - S(1) - \frac{1}{2}S(x_0) \\ &=: u - v - \frac{1}{2}S(x_0) \\ &< u - v \\ u - v &> C(2) \\ &= C(1+1) \\ &= u^2 - v^2 \\ &= (u-v)(u+v) \\ (u-v) &> (u-v)(u+v) \\ u + v &< 1 \\ &= u^2 + v^2 \\ \text{aber: } 0 < u < 1 &\Rightarrow u^2 < u \\ \wedge 0 < v < 1 &\Rightarrow v^2 < v \end{aligned}$$

14.8 Periodische Funktionen sin/cos

$\sin\frac{\pi}{2}$	$=$	1	$\cos\frac{\pi}{2}$	$=$	0
$\sin x + \frac{\pi}{2}$	$=$	$\cos x$	$\cos x + \frac{\pi}{2}$	$=$	$-\sin x$
$\sin x + \pi$	$=$	$-\sin x$	$\cos x + \pi$	$=$	$-\cos x$
$\sin x + 2\pi$	$=$	$\sin x$	$\cos x + 2\pi$	$=$	$\cos x$

Sinus und Cosinus sind damit *periodische Funktionen* mit der Periode 2π.

14.9 Tangens und Cotangens

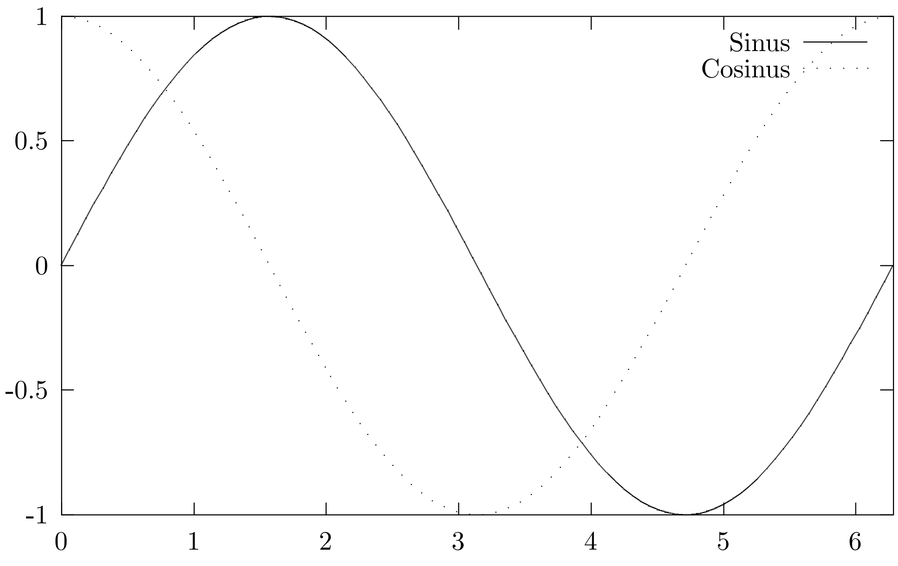
Definiere

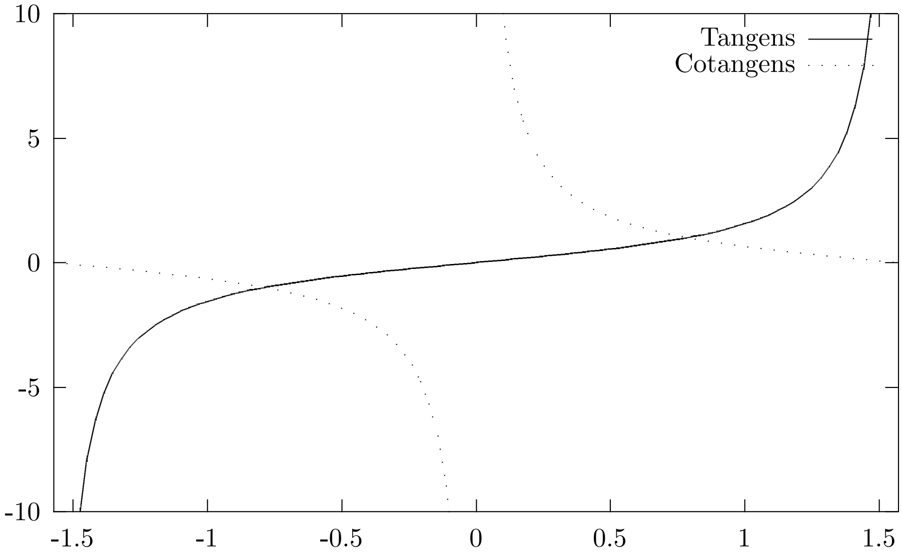
$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

Beide Funktionen sind periodisch mit Periode π wegen $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}' x &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \operatorname{tg}^2 x \\
\operatorname{ctg}' x &= -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \\
&= \frac{-1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

14.10 Graphen





14.11 Arcus(co)sinus

Auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Sinusfunktion streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ mit } \sin x \mapsto x$$

ist auf $(-1,1)$ differenzierbar mit

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis: Sei $b \in (-1,1)$ mit $b = \sin a$ Dann: $\sin'(a) = \cos a \neq 0$. Mit (11.5.2) gilt:

$$\arcsin' b = \frac{1}{\sin' a} = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

Analog: Auf $[0,\pi]$ ist die Cosinusfunktion streng monoton fallend. Die Umkehrfunktion

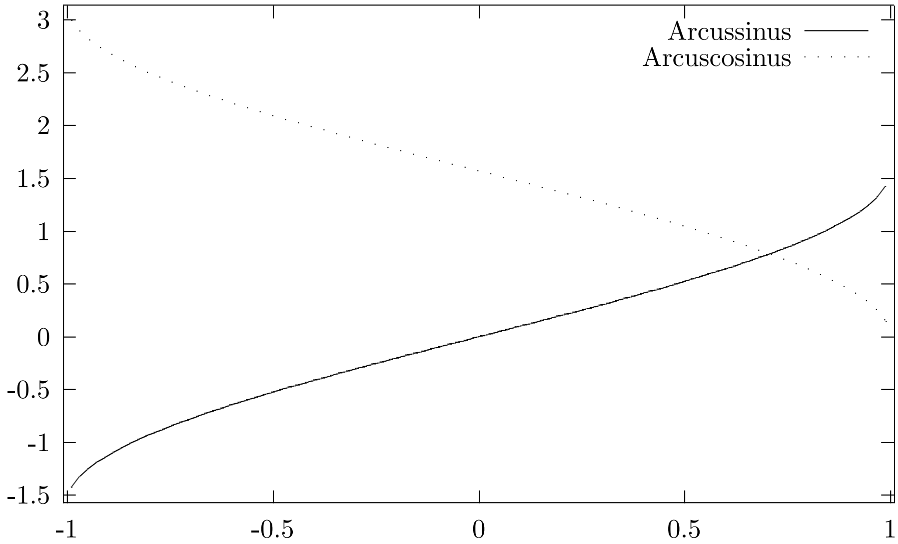
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \text{ mit } \cos x \mapsto x$$

ist auf $(-1,1)$ differenzierbar mit

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Beweis: Sei $b \in (-1,1)$ mit $b = \sin a$ Dann: $\sin'(a) = \cos a \neq 0$. Mit (11.5.2) gilt:

$$\arcsin' b = \frac{1}{\sin' a} = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

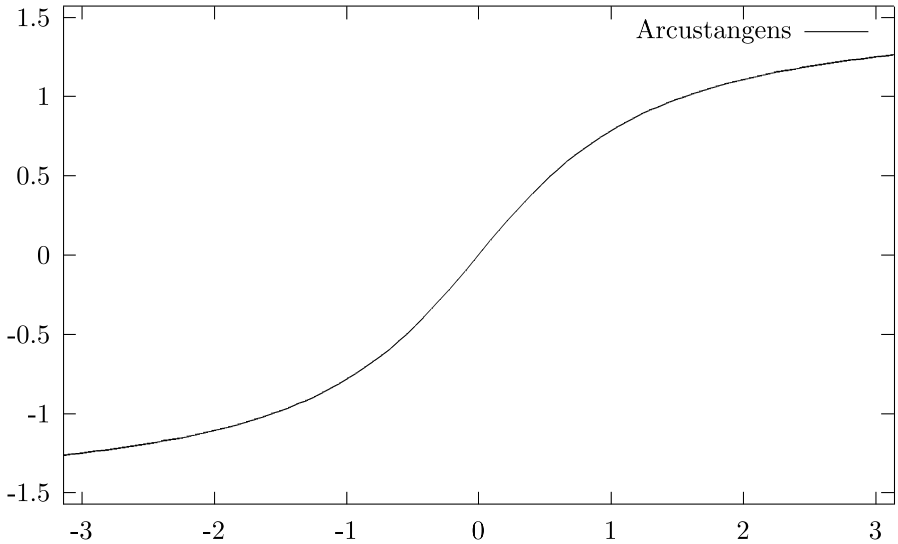


14.12 Arcus(co)tangens

Tangens und Cotangens sind auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw. $(0, \pi)$ streng monoton mit Bild $\mathbb{R}$. Umkehrfunktionen:

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ mit } \operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi) \text{ mit } \operatorname{arcctg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$



14.13 Abschätzungen

SATZ: $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ BEWEIS:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 \\ &= \sin'(0) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

BEMERKUNG: $\frac{\pi}{2} > \sqrt{2}$

BEWEIS: Sete $b = \frac{\pi}{2}$. Mit Taylor:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(b) = \underbrace{\cos(0)}_{1} + b \cdot \underbrace{\cos'(0)}_{0} + \frac{b^2}{2}\underbrace{\cos''(x_0)}_{0<x_0<\frac{\pi}{2}} \\ &> 1 - \frac{b^2}{2} \\ \Rightarrow b^2 &> 2 \end{aligned}$$

15 Reihen reeller Zahlen und Funktionen

15.1 Konvergenz einer Reihe, geometrische und harmonische Reihe

Sei $x_1, x_2, ...$ eine Folge reeler Zahlen. Setze

$$\begin{aligned} s_1 &:= x_1 \\ s_2 &:= x_1 + x_2 \\ s_3 &:= x_1 + x_2 + x_3 \\ s_n &:= \sum_{j \leq n} x_j \end{aligned}$$

Sei $u = \lim_{n \to \infty} s_n$. Dann sagen wir: die Reihe $\sum_j x_j$ konvergiert gegen u.

Beispiel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

Allgemeiner: Die *Geometrische Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ konvergiert für $|q| < 1$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$$

Beweis[23]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} &= \lim_{n \to \infty} \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{q^n - 1}{q-1} \\ \frac{q^n - 1}{q-1} &= 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} \end{aligned}$$

Satz: *Notwendiges* Kriterium für die Konvergenz der Reihe $\sum_n x_n$: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Beweis: Reihe konvergent $:\Leftrightarrow$ (s_n) konvergiert $\Rightarrow$ $(s_n - s_{n-1})$ ist Nullfolge.

Umkehrung gilt nicht, Gegenbeispiel: *harmonische Reihe*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \infty$$

Beweis:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{>8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}}$$

[23] „fangen wir mal hinten an, so daß auch alle Hiwis zufrieden sind...“

15.2 Regeln (trivial)

$$
\begin{aligned}
u &:= \sum_j x_j \\
v &:= \sum_j y_j \\
u+v &:= \sum_j x_j + y_j \\
k \cdot u &:= \sum_j k \cdot x_j \\
\left| \sum_j x_j + y_j \right| &= \underbrace{\sum_j |x_j| + \sum_j |y_j|}_{\text{falls konvergent}}
\end{aligned}
$$

15.3 Das Cauchy-Kriterium für Reihen

$$\sum_j x_j \text{ konviert (sic!) } \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=m}^{p} x_j \right| < \varepsilon\, \forall\, p \geq m$$

andere Version:

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=q}^{p} x_j \right| < \varepsilon\, \forall\, p, q \text{ mit } m \leq q \leq p$$

Beweis: Setze $s_N := \sum_{j‘n} x_j$. Mit (9.5) und (9.7): $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge.

15.4 Absolute Konvergenz

Definition: Die Reihe[24] Σx_n ist *absolut konvergent*, genau dann wenn $\Sigma\,|x_n|$ konvergent. D.h. es existiert $c > 0$ mit $\sum_{n\leq m} |x_n| < c\, \forall\, m$.

15.5 Majorantenkriterium (M)

Sei die Reihe Σy_n absolut konvergent. Sei eine Reihe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $|x_n| \leq |y_n|$ für fast alle n. Dann folgt: Die Reihe Σx_n ist absolut konvergent.

[24] „Heute wollen wir uns nur mit wirklich wesentlichen Dingen beschäftigen“ Prof. Bender, kurz nachdem er über Karnevalsmützen und die physische Anstrengung während einer Vorlesung philosophierte

Hauptanwendung: harmonische Reihe (bzw. allgemeiner $y_n = kq^n$ für $k > 0$) als größere Reihe.

15.6 Konvergenz

Behauptung: aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz einer Reihe.

Beweis: Sei Σx_n absolut konvergent. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein m mit $\sum_{j=m}^{p} |x_j| < \varepsilon \ \forall \ p \geq m$ (Cauchy). Also: $\left|\sum_{j=m}^{p} x_j\right| \leq \sum_{j=m}^{p} |x_j| < \varepsilon$. Mit Cauchy: $\sum_j x_j$ konvergent.

15.7 Hauptbeispiel

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$(E) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

absolut, also auch die Reihen

$$(C) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots$$

$$(S) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots$$

Beweis: $\exists \, n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$. Setze $q := \frac{|x|}{n} < 1$ und $k = \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ Für $j \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x^{n+j}}{(x+j)!}\right| &= k \frac{|x|^{j+1}}{n \cdot (n+1) \cdots (n+j)} \\ &\leq k \left(\frac{|x|}{n}\right)^{j+1} \\ &= kq^{j+1} \end{aligned}$$

15.8 Funktionenreihen

Betrachte eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$). Konvergiert $\Sigma f_n(x)$ für jedes $x \in D$[25], so erhalten wir eine neue Funktion

[25] punktweise Konvergenz

$f : D \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto \sum_n f_n(x)$. Schreibe $f = \sum_n f_n$ (Grenzfunktion). Seien alle f_n differenzierbar. Fragen:

1. Ist dann auch f differenzierbar?
2. Gilt dann sogar $f'(x) = \sum_n f_n'(x) \; \forall \, x \in D$?

betrachte Spezialfall: Potenzreihen

$$(P) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Abgeleitete Reihe wäre dann:

$$(P') = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Zudem würde dann gelten:

$$(E') = (E) \qquad (C') = (-S) \qquad (S') = (C)$$

15.9 Differenzierbarkeitssatz für Funktionen

VORAUSSETZUNG: Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in D$; $f_n = \Sigma f_n$; $\Sigma f_n'(a)$ konvergent; ΣL_n konvergent ($L_n \geq 0$); gelte $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L_n |x - y| \; \forall \, x, y \in D$[26].

BEHAUPTUNG: f ist differenzierbar in a mit $f'(a) = \Sigma f_n'(a)$.

Allgemeine Bemerkung: Sei $u = \Sigma x_n$. Für jedes n ist

$$u = \sum_{j \leq n} x_j + \underbrace{\sum_{j > n} x_j}_{konvergent}$$

Zu $\varepsilon > 0$ existiert m mit

$$\left| u - \sum_{j \leq n} x_j \right| < \varepsilon \; \forall \, n \geq m$$

[26] f_n ist damit Lipschitzstetig

BEWEIS: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert m mit $\sum_{j>m} L_j < \varepsilon$ und $\left|\sum_{j>m} f_j'(a)\right| < \varepsilon$. Erhalte für $x \in D, x \neq a$:

$$
\begin{aligned}
A_j &:= \frac{f_j(x) - f_j(a)}{x - a} \\
\text{erhalte } A &= \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \sum_j f_j'(a) \right| \\
&= \left| \sum_j (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&= \left| \sum_{j \leq m} (A_j - f_j'(a)) + \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&\leq \left| \sum_{j \leq m} (A_j - f_j'(a)) \right| + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
\text{für ein } \delta > 0 \quad : &= \sum_{j \leq m} \underbrace{\left| \frac{f_j(x) - f_j(a)}{x - a} - f_j'(a) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{m} \ \forall\ x \in U_\delta(a)} + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&= \underbrace{\sum_{j \leq m} \left| \frac{f_j(x) - f_j(a)}{x - a} - f_j'(a) \right|}_{\leq m \cdot \frac{\varepsilon}{m}} + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&\leq \varepsilon + \left| \sum_{j>m} (A_j - f_j'(a)) \right| \\
&\leq \varepsilon + \underbrace{\left| \sum_{j>m} A_j \right|}_{\leq \sum_{j>m} L_j < \varepsilon} + \underbrace{\left| \sum_{j>m} f_j'(a) \right|}_{< \varepsilon} \\
&\leq 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

Also:

$$\exists\ \delta > 0 \text{ mit } A \leq 3\varepsilon \ \forall\ x \text{ mit } |x - a| < \delta$$

15.10 Hauptsatz

Sei D ein kompaktes Intervall. Konvergiert die abgeleitete Reihe

$$(P') \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{von} \qquad (P) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolut für jedes $x \in D$, so konvergiert auch (P) für alle $x \in D$ absolut.
Zudem ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Beweis:

1. absolute Konvergenz von (P): für alle $n \geq |x|$ gilt: $|a_n x^n| \leq |n a_n x^{n-1}|$.
   Wende das Majorantenkriterium (M) an.

2. Differenzierbarkeit: $f_n(x) = a_n x^n$;

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}\right| \\
= \;& |a_n| \cdot \left|\frac{x^n - y^n}{x - y}\right| \\
= \;& |a_n| \cdot \left|x^{n-1+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}}\right| \\
\leq \;& |a_n| \cdot n \cdot |u|^n \text{ für } u \in D \text{ mit } |u| \geq |x| \geq x \in D \\
L_n \;:=\;& |a_n| \cdot n \cdot |u|^n \\
L_0 \;:=\;& |a_0| \\
\sum_{n \geq 0} L_n \;=\;& \sum_n \underbrace{|a_n \cdot n \cdot U^n|}_{\text{konvergiert, da } (P') \text{ absolut konvergiert}}
\end{aligned}$$

Index