Analysis Zusammenfassung

Definitionen, Listen, ...

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teweilse **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

1 Definitionen

Ableitung, Differenzienquotient

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f'^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ableitung verketteter Exponentialfunktionen

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + \log f(x) \cdot g'(x)\right)$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \left|\left\{P \subseteq \mathcal{P}(\{1, ..., n\}) \middle| |P| = m\right\}\right|$$

Binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} \cdot a^m \cdot b^{n-m}\right)$$

Bernoullische Ungleichung

$$\forall\, a \geq -1, n \in \mathbb{N}_0 \;:\; (1+a)^n \geq (1+na)$$

Bolzano-Weierstrass, Satz

In $\mathbb{R}$ hat jede unendliche beschränkte Teilmenge einen Häufungspunkt.
In $\mathbb{R}$ hat jede beschränkte Folge einen Häufungspunkt.

Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon\; \forall\, n, m \geq n_0$
Konvergent $\Rightarrow$ Cauchy. In $\mathbb{R}$: konvergent $\Leftrightarrow$ Cauchy.

Dreiecksungleichung

$$|a-b| \leq |a| + |b| \geq |a+b|$$

Häufungspunkt h von M

Jede Umgebung von h enthält wenigstens ein $x \in M x \neq h$
Jeder Häufungspunkt einer Folge ist Limes einer Teilfolge

Integrationsmethoden

$$\text{partielle: } \int f g' = f g - \int f' g$$

durch Substitution:

Konvergenz, Funktion oder Folge

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 \; \forall x \geq x_0 : |a - f(x)| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : |a - x_n| < \varepsilon$$

Konvergenz, Reihe

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{v=0}^{n} x_v = x \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \left| x - \sum_{v=0}^{n} x_v \right| < \varepsilon$$

$$\text{Cauchy: } \lim_{n \to \infty} \sum_{v=0}^{n} x_v = x \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n, m \geq n_0 : \left| \sum_{v=n}^{m} x_v \right| < \varepsilon$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} x_v \text{ konvergiert } \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge}$$

Konvergenz, absolute

$$\sum_{v=0}^{\infty} x_v \text{ konv. absolut } \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{v=0}^{n} |x_v| \text{ exist. } \Rightarrow \sum_{v=0}^{\infty} x_v \text{ konv.}$$

Konvergenz, Majorantenkriterium

$$(M) \left(\sum_{v=0}^{\infty} y_v \ \substack{\text{abs.} \\ \text{konv.}} \right) \wedge \Big(|x_n| \leq |y_n| \ \forall\, n \Big) \Rightarrow \left(\sum_{v=0}^{\infty} x_v \ \substack{\text{abs.} \\ \text{konv.}} \right)$$

Konvergenz, uneigentliche

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, u \in \mathbb{R} \; \exists\, x_0 \in \mathbb{R} : f(x) > u \; \forall\, x \geq x_0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\, u \in \mathbb{R} \; \exists\, x_0 \in \mathbb{R} : f(x) < u \; \forall\, x \geq x_0$$

Konvergenzradius r

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ divergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > r$

Leibnitzkriterium für alternierende Reihen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monoton fallende Nullfolge } \Rightarrow 0 \le \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \le a_0$$

Limes superior und inferior bei H Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \max(H) \text{ und } \liminf_{n\to\infty} x_n := \min(H)$$

Mittelwertsatz f in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\text{falls } f(a) = f(b) \;:\; \exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f'(x_0) = 0 \;\text{ (S.v. Rolle)}$$

Mittelwertsatz, Erweiterung $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g(x) > 0 \;\forall\, x$

$$\exists\, u \in D \text{ mit } \int_a^{b^*} fg = f(u) \cdot \int_a^b g$$

Metrik, Eigenschaften der Metrik d

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \wedge \quad d(x,y) = d(y,x) \quad \wedge \quad d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z)$$

Stetigkeit

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, (x \in D \mid d(x,x_0) < \delta) \;:\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Stetigkeit, gleichmäßige

$$\exists\, \delta > 0 \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\forall\, (x \in D \mid d(x,x_0) < \delta) \;:\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Stetigkeit, Folgenkriterium für Stetigkeit von f in x:

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{n\to\infty} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$ gilt:
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

Stetigkeit, für auf einem Intervall $[a,b]$ **stetige Funktionen** in $\mathbb{R}$ gilt:

f ist gleichmäßig stetig
s $f(D)$ ist kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$
ist f streng monoton, so ist f^{-1} von $f(D)$ nach $[a,b]$ stetig

Taylor-Satz für $a < b \in D$ und $f^{(n)}$ existiert:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$\text{für } \; n = 2 \quad f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f''(x_0)$$

Taylor-Formel mit Integral

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i \right) + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Vollständigkeit

jede von oben beschränkte nichtleere Teilmenge hat eine obere Grenze
jede von unten beschränkte nichtleere Teilmenge hat eine untere Grenze

2 Reihen

2.1 wichtige Reihen

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{falls} \quad |x| < 1 \\ \infty & \text{falls} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Binomialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = \begin{cases} (1+x)^p & \text{falls} \quad |x| < 1 \\ +\infty & \text{falls} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Logarithmusreihe für $|x| < 1$ oder $x = 1$

$$\log 1 + x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ...$$

Sinusreihe

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots$$

Cosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots$$

Arcustangensreihe für $|x| < 1$ oder $x = 1$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm ...$$

2.2 absolute Konvergenz und Divergenz von Reihen

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen:

1. $\exists\, q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n
2. $\exists\, q < 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für fast alle n
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
4. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ und $a_n \neq 0$ für fast alle n
5. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$
6. $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ und $a_n \neq 0$ für fast alle n

(Analoge) Kriterien für Divergenz:

1. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n
2. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
4. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ und $a_n \neq 0$ für fast alle n
5. $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
6. (kein analoges Kriterium)
7. $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt
8. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ und $a_n \neq 0$ für fast alle n

3 Normierte Räume

3.1 Funktionenräume

- $\mathcal{F}(A,B)$: Menge aller Funktionen $f : A \to B$
- $\mathcal{B}(A,B)$: Menge der beschränkten Funktionen (Banachraum)
- $\mathcal{C}(A,B)$: Menge der stetigen Funktionen (Banachraum)
- $\mathcal{C}^n(A,B)$: Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen
- $\mathcal{L}(A,B)$: Menge der stetigen linearen Funktionen
- $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$
- $\mathcal{R}(A,B)$: Menge der integrierbaren Funktionen
- Inklusion:
$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^n \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$$

3.2 Normen

- p-Norm auf $\mathbb{R}^n$:
$$\|(a_1,...,a_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}$$
- ∞-Norm auf $\mathbb{R}^n$:
$$\|(a_1,...,a_n)\|_\infty = \max\{\,|a_i| \mid i = 1,...,n\}$$
- Supremums-Norm auf $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$:
$$\|f\| = \sup\{\,|f(x)| \mid x \in D\}$$
- Operator-Norm auf $\mathcal{L}(V,W)$:
$$\begin{aligned}\|\alpha\| &:= \inf\{\,c \geq 0 \mid \|\alpha(x)\| \leq c\,\|x\| \;\forall\, x \in V\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|\alpha(x)\|}{\|x\|} \,\middle|\, x \in V \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\{\,\|\alpha(y)\| \mid y \in V \setminus \{0\} \text{ mit } |y| \leq 1\}\end{aligned}$$
- Operator-Norm auf $\mathbb{R}_{m\times n}$:
$$\|A\| = \inf\{\,c \geq 0 \mid \|A \cdot v\| \leq c \cdot \|v\| \;\forall\, v \in \mathbb{R}^n\}$$