Differentialgeometrie 2

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teweilse **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Mihhail Aizatulin (avatar@hot.ee)

Inhaltsverzeichnis

0 Differentialrechnung auf Untermannigfaltigkeiten

0.1 Untermannigfaltigkeiten

DEFINITION 0.1: Seien $n, k \in \mathbb{N}_0, U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^∞-Funktion.

1. f heißt *Immersion*, falls $Df_u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ für alle $u \in U$ injektiv ist.
2. f heißt *Einbettung*, falls f Immersion ist und zusätzlich gilt: f ist injektiv und f^{-1} ist stetig (d.h. f ist ein *Homöomorphismus*.)

DEFINITION 0.2: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$*, falls zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und eine Einbettung $f \colon U \to M \cap V$ existiert mit U offen in $\mathbb{R}^n$.

- In diesem Fall nennt man f eine *Parametrisierung* von M nahe p (bzw. eine Parametrisierung von $M \cap V$)
- $M \cap V$ heißt *Koordinatenumgebung* von p in M; ist $q \in M \cap V$, etwa $q = f(u)$ mit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$, so heißen $(u_1, \ldots, u_n)$ die *Koordinaten* von q bezüglich f.

0.2 Analytische Konzepte

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $M \cap V \neq \emptyset$ eine Koordinatenumgebung von $p_0 \in M$ mit zugehöriger Parametrisierung

$$\mathbb{R}^n \overset{\text{offen}}{\supset} U \xrightarrow{f} f(U) = M \cap V \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

Sei $u_0 = f^{-1}(p_0)$.

DEFINITIONEN:

1. Wie für Flächen definieren wir den *Tangentialraum*

$$T_{u_0} f = \operatorname{Bild} Df_{u_0}$$

Das Differential $Df_{u_0} \colon \mathbb{R}^n \to T_{u_0}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus. (Später: $T_{u_0} f$ ist unabhängig von der Wahl von f)

2. Sei $h\colon M \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Wir sagen, h ist C^∞ *nahe* p_0, falls $h \circ f\colon U \to \mathbb{R}^m$ nahe u_0 das ist. (Auch unabhängig von f)

3. Für h wie in (2) definieren wir das *Differential*

$$dh_{p_0}\colon T_{u_0} \to \mathbb{R}^m$$

so, dass $h \circ f$ in u_0 der Kettenregel genügt:

$$D(h \circ f)_{u_0} = dh_{f(u_0)} \circ Df_{u_0}$$

Wir müssen also definieren:

$$dh_{p_0} = D(h \circ f)_{u_0} \circ Df_{u_0}^{-1}$$

(Wiederum: Von der Wahl von f unabhängig)

Zum Nachweis, dass (1), (2) und (3) unabhängig von der gewählten Parametrisierung sind, betrachte eine weitere Parametrisierung

$$\mathbb{R}^n \overset{\text{offen}}{\supset} \tilde{U} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{f}(\tilde{U}) = M \cap \tilde{V} \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

Dabei sei $\tilde{V}$ offen in $\mathbb{R}^{n+k}$ und $\tilde{f}$ eine Einbettung. Sei $\tilde{u}_0 = \tilde{f}^{-1}(p_0) \in \tilde{U}$. Die Teilmengen

$$\begin{aligned} U_0 &= f^{-1}(f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U})) = f^{-1}(V \cap \tilde{V}) \\ \tilde{U}_0 &= \tilde{f}^{-1}(f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U})) = \tilde{f}^{-1}(V \cap \tilde{V}) \end{aligned}$$

sind beide offen, da f und $\tilde{f}$ stetig und $V \cap \tilde{V}$ im $\mathbb{R}^{n+k}$ offen sind und

$$\varphi = f^{-1} \circ \tilde{f}|_{\tilde{U}_0}\colon \tilde{U}_0 \to U_0$$

bijektiv ist. Wir werden beweisen:

(*) φ ist C^∞-Diffeomorphismus.

Unter Verwendung von (*) folgt leicht, dass Tangentialraum, Differenzierbarkeit und Differential gemäß (1), (2), (3) vom gewählten f unabhängig sind:

Zu (1):

$$\begin{aligned} T_{\tilde{u}_0}\tilde{f} &= \operatorname{Bild} D\tilde{f}_{\tilde{u}_0} = \operatorname{Bild}[D(f \circ (f^{-1} \circ \tilde{f}))_{\tilde{u}_0}] \\ &= \operatorname{Bild}(Df_{u_0} \circ D\varphi_{\tilde{u}_0}) \\ &= \operatorname{Bild} Df_{u_0} = T_{u_0} f \end{aligned}$$

Man schreibt daher auch meist $T_{p_0}M$.

Zu (2): Es sind äquivalent:

$$\begin{aligned}
&h \text{ ist } C^\infty \text{ nahe } p_0 \text{ bezüglich } f \\
\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}\quad & h \circ f|_{U_0} \colon U_0 \to \mathbb{R}^m \text{ ist } C^\infty \text{ nahe } u_0 \\
\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}\quad & (h \circ f|_{U_0}) \circ \varphi = h \circ \tilde{f}|_{\tilde{U}_0} \colon \tilde{U}_0 \to \mathbb{R}^m \text{ ist } C^\infty \text{ nahe } \tilde{u}_0 \\
\Longleftrightarrow\quad & h \text{ ist } C^\infty \text{ nahe } p_0 \text{ bezüglich } \tilde{f}
\end{aligned}$$

Zu (3): Ableitung (Differential) von h in p_0:

$$dh^f_{p_0} = D(h \circ f)_{u_0} \circ Df^{-1}_{u_0} \colon T_{p_0}M \to \mathbb{R}^m$$

Bemerkung: D steht für Ableitung der Abbildung auf einer offenen Teilmenge eines Euklidischen Raumes, d für Ableitung von der Abbildung auf Untermannigfaltigkeiten.

Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned}
& D\tilde{f}_{\tilde{u}_0} = D(f \circ \varphi)_{\tilde{u}_0} = Df_{u_0} \circ D\varphi_{\tilde{u}_0} \\
\Longrightarrow\quad & D\varphi_{\tilde{u}_0} \circ D\tilde{f}^{-1}_{\tilde{u}_0} = Df^{-1}_{u_0}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
dh^{\tilde{f}}_{p_0} &= D(h \circ \tilde{f})_{\tilde{u}_0} \circ D\tilde{f}^{-1}_{\tilde{u}_0} \\
&= D((h \circ f) \circ \varphi)_{\tilde{u}_0} \circ D\tilde{f}^{-1}_{\tilde{u}_0} \\
&= D(h \circ f)_{u_0} \circ D\varphi_{\tilde{u}_0} \circ D\tilde{f}^{-1}_{\tilde{u}_0} \\
&= D(h \circ f)_{u_0} \circ Df^{-1}_{u_0} = dh^f_{p_0}
\end{aligned}$$

Beweis von (*): Es reicht zu zeigen, dass φ C^∞ ist (dasselbe Argument funktioniert dann auch für φ^{-1}). Da $\tilde{f}$ C^∞ ist, reicht es zu zeigen:

(**) $f^{-1} \colon f(U) \to U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich um jedes $f(\hat{u}) \in f(U)$ herum lokal fortsetzen zu einer C^∞-Abbildung $g \colon W \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $f(\hat{u}) \in W$ und W offen in $\mathbb{R}^{n+k}$.

Zum Nachweis von (**): Wähle eine lineare Abbildung $\psi \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$, so dass $\psi|_{T_{p_0}M}$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Dann ist $\Sigma = \psi \circ f \colon U \to \mathbb{R}^n$ eine C^∞-Abbildung mit Differential in $\hat{u}$:

$$D\Sigma_{\hat{u}} = \psi \circ Df_{\hat{u}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Mit dem Umkehrsatz folgt: Es gibt eine Umgebung $\hat{U} \subset U_0 \subset \mathbb{R}^n$ von $\hat{u}$ mit

1. $\hat{V} = \Sigma(\hat{U})$ ist offen in $\mathbb{R}^n$

2. $\Sigma : \hat{U} \to \hat{V}$ ist C^∞-Diffeomorphismus.

Dann ist $\hat{W} = \psi^{-1}(\hat{V}) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen. Für evtl. kleineres offenes $W \subset \hat{W}$ gilt zusätzlich: $f(\hat{U}) = W \cap f(U)$ (da $\hat{U}$ offen und f^{-1} stetig). Dann ist

$$g = \Sigma^{-1} \circ \psi|_W \colon W \to \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$$

die gewünschte lokale C^∞-Fortsetzung von f^{-1}, denn sie ist C^∞. Zusätzlich gilt für beliebiges $\bar{q} \in f(\hat{U}) = W \cap f(U)$, etwa $\bar{q} = f(\bar{u})$ mit $\bar{u} \in \hat{U}$:

$$\begin{aligned} & \Sigma(\bar{u}) = \psi \circ f(\bar{u}) = \psi(\bar{q}) \\ \Rightarrow\quad & \bar{u} = \Sigma^{-1}(\psi(q)) \\ \Rightarrow\quad & f^{-1}(\bar{q}) = \bar{u} = \Sigma^{-1}(\psi(\bar{q})) = g(\bar{q}) \end{aligned}$$

Somit ist g Fortsetzung von f^{-1} nahe $f(\hat{u})$ bzw. f^{-1} ist Einschränkung von g nahe $f(\hat{u})$.
Bemerkung: Ist $h\colon M \to \mathbb{R}^m$ eine C^∞-Abbildung, so ist

$$(h \circ f) \circ g\colon W \to \mathbb{R}^m$$

eine C^∞-Abbildung und es gilt

$$(h \circ f) \circ g|_{M \cap W} = (h \circ f) \circ f^{-1}|_{M \cap W} = h|_{M \cap W}$$

Somit ist $(h \circ f) \circ g$ eine C^∞-Fortsetzung von h auf eine offene Umgebung von $f(\hat{u})$. Damit sind äquivalent:

1. $h\colon M \to \mathbb{R}^m$ ist eine C^∞-Abbildung

2. h besitzt um jeden Punkt $q \in M$ lokal eine C^∞-Fortsetzung auf eine offene Umgebung von q im $\mathbb{R}^{n+k}$

Beobachtung: Auf einem „Raum“ M lässt sich Analysis betreiben, falls

1. M lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist vermittels lokaler Homöomorphismen

$$\mathbb{R}^n \supset U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} V_\alpha \subset M$$

2. Alle „Kartenwechsel“ $f_{\tilde{\alpha}}^{-1} \circ f_\alpha$ auf ihren Definitionsbereichen C^∞-Abbildungen sind.

Dies ergibt das Konzept abstrakter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten.

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

DEFINITION 1.1: Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge von X nennen wir eine *Topologie auf* X und bezeichnen die Elemente $U \in \mathcal{T}$ als *offene Mengen* der Topologie, falls gilt:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offene Mengen.
3. Durchschnitte endlich vielen offenen Mengen sind offene Mengen.

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt dann *topologischer Raum*. Die Komplemente $X \setminus U$ offener Mengen $U \in \mathcal{T}$ nennt man *abgeschlossene (Teil-)Mengen* von X (bezüglich $\mathcal{T}$)

BEMERKUNG:

- Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Teilmengen sind wieder abgeschlossen.
- Wichtigste Beispielklasse: Metrische Räume (X, d): Offen sind die leere Menge und beliebige Vereinigungen offener Bälle.

DEFINITION 1.2: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1. Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in X$, falls es eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in U \subset W$.
2. X heißt *Hausdorff-Raum*, falls es zu jedem Paar von Punkten $x \neq y \in X$ disjunkte offene Umgebungen gibt.

BEMERKUNG: In metrischen Räumen gilt für $x \neq y$, dass $r = d(x, y) > 0$ und nach Dreiecksungleichung sind $B_{r/3}(x), B_{r/3}(y)$ disjunkte (sogar offene) Umgebungen von x bzw. y. Somit ist (X, d) als topologischer Raum hausdorffsch.

BEISPIEL eines nicht hausdorffschen Raumes: Zum $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathcal{T}_0$ die Menge aller offenen Mengen, die die Null enthalten, $\mathcal{T}'$ die Menge aller sonstigen offenen Teilmengen. Definiere auf

$$\hat{X} = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \dot{\cup} \{A\} \dot{\cup} \{B\}$$

mit neuen Elementen A, B die Topologie

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}' \quad &\cup \quad \{(U \setminus \{0\}) \cup \{A\} \mid U \in \mathcal{T}_0\} \\ &\cup \quad \{(U \setminus \{0\}) \cup \{B\} \mid U \in \mathcal{T}_0\} \\ &\cup \quad \{(U \setminus \{0\}) \cup \{A, B\} \mid U \in \mathcal{T}_0\}\end{aligned}$$

Diese Topologie ist nicht hausdorffsch, da A und B keine disjunkten Umgebungen enthalten.

DEFINITION 1.3: Ein topologischer Hausdorffraum $(M, \mathcal{T})$ heißt eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit*, falls er lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. für jedes $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $M' \subset M$ und einen Homöomorphismus $x\colon M' \to U$ auf eine offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$. Jedes solche Paar (M', x) heißt eine *Karte* für M und M' die zugehörige *Kartenumgebung* von p.

BEMERKUNGEN:

- Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen: Urbilderkriterium, d.h. Urbilder offener Mengen sind offen.

- Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so wird M topologischer Raum vermittels der *Spurtopologie*: offen in M sind genau alle Teilmenge der Gestalt $M \cap V$ mit V offen in $\mathbb{R}^{n+k}$. Da $\mathbb{R}^{n+k}$ (als metrischer Raum) hausdorffsch ist, gilt dies auch für M mit der Spurtopologie.

  Ist $p \in M$, so existiert eine Parametrisierung

  $$f\colon U \to M \cap V = f(U) \subset \mathbb{R}^{n+k}, \quad U \text{ offen in } \mathbb{R}^n$$

  für eine Koordinatenumgebung $M \cap V$ von p mit V offen in $\mathbb{R}^{n+k}$. Dann ist

  $$x = f^{-1}\colon M \cap V \to U$$

  eine Karte für M. Also ist M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

- Die Dimension n einer topologischer Mannigfaltigkeit ist eindeutig bestimmt, sofern M zusammenhängend ist. Ansonsten gäbe es ein $p \in M$, das Umgebungen besitzt homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ und zum $\mathbb{R}^m$ mit $n \neq m$ und damit (per Verknüpfung der Karten) einen Homöomorphismus der Form

  $$\psi\colon U \to \tilde{U}, \quad U \text{ offen in } \mathbb{R}^n,\ \tilde{U} \text{ offen in } \mathbb{R}^m$$

  Solche ψ existieren nicht (überraschend aufwändiger Beweis aus der Algebraischen Topologie: „Invarianz der Dimension“)

DEFINITION 1.4: Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

1. Zwei Karten $(M_1, x_1), (M_2, x_2)$ für M heißen *verträglich*, falls der Kartenwechsel

$$x_1 \circ x_2^{-1} \colon x_2(M_1 \cap M_2) \to x_1(M_1 \cap M_2)$$

   ein C^r-Diffeomorphismus ist.

2. Eine Familie von Karten $\mathcal{A} = (M_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt *C^r-Atlas* für M, falls alle Karten untereinander paarweise C^r-verträglich sind und die M_α ganz M überdecken.

   Ist $A' \subset A$ und die $M_{\alpha'}, \alpha' \in A'$ überdecken ebenfalls M, so heißt $(M_{\alpha'}, x_{\alpha'})_{\alpha' \in A'}$ ein *Teilatlas* von $\mathcal{A}$.

3. Ein Atlas $\mathcal{A} = (M_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ für M heißt *maximal*, falls jede Karte (M', x'), die mit allen (M_α, x_α) C^r-verträglich ist, schon zu $\mathcal{A}$ gehört.

BEMERKUNGEN:

- Ist $\mathcal{A}$ maximaler C^r-Atlas für M und $(M_\alpha, x_\alpha) \in \mathcal{A}$, so enthält $\mathcal{A}$ auch alle Einschränkungen von (M_α, x_α) auf offene Teilmengen, d.h. alle $(M_\alpha \cap M', x_\alpha|_{M_\alpha \cap M'})$ für M' offen in M.

- Da die $x_\alpha^{-1} \colon U_\alpha \to M_\alpha$ stetig sind, sind die $x_\alpha(M_1 \cap M_2)$ offen in U_α und damit im $\mathbb{R}^n$.

- Jeder C^r-Atlas $\mathcal{A}$ von M ist enthalten in einem eindeutig bestimmten maximalen C^r-Atlas und zwar in

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} \;=\; \{(M', x') \mid & (M', x') \text{ ist Karte für } M \text{ und mit jeder} \\ & \text{Karte in } \mathcal{A}\ C^r\text{-verträglich } \} \end{aligned}$$

  (Dass dann die (M', x') untereinander auch C^r-verträglich sind, folgt aus der Kettenregel). Zur Beschreibung eines maximalen C^r-Atlas reicht es daher, einen beliebigen Teilatlas anzugeben.

- Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so bilden die Inversen von Parametrisierungen, d.h.

$$M' = M \cap V \xrightarrow{x = f^{-1}} U \subset \mathbb{R}^n$$

nach Kapitel 0.2 einen $\mathbb{C}^\infty$-Atlas für M: Nach Definition einer Untermannigfaltigkeit überdecken alle Bilder von Parametrisierungen ganz M. Für zwei Parametrisierungen f_1, f_2 bzw. Karten $x_i = f_i^{-1}$ ist der Kartenwechsel

$$x_1 \circ x_2^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2$$

nach 0.2 (*) ein C^∞-Diffeomorphismus. Dieser C^∞-Atlas für M ist sogar maximal (Übung).

DEFINITION 1.5: Sei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine *$n$-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit* ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{T})$ mit einem maximalen C^r-Atlas $\mathcal{A} = (M_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$, der einen abzählbaren Teilatlas besitzt. Solch einen maximalen Atlas nennt man auch eine *C^r-differenzierbare Struktur* auf $(M, \mathcal{T})$.

BEISPIELE:

- Ist $(M, \mathcal{T})$ kompakt und besitzt einen maximalen C^r-Atlas $(M_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$, so gibt es zur offenen Überdeckung $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ von $(M, \mathcal{T})$eine endliche Teilüberdeckung und damit sogar einen endlichen Teilatlas.

- Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so besitzt der (maximale) C^∞-Atlas

  $$\mathcal{A} = \left\{ x = f^{-1} \mid f \text{ Parametrisierung für } M \right\}$$

  einen abzählbaren Teilatlas: Jedes $p \in M$ liegt in einer Koordinatenumgebung $M' = M \cap V = \mathrm{Bild}(f)$ mit V offen in $\mathbb{R}^{n+k}$. Es gibt einen Ball

  $$V' = B_r(x),\ x \in \mathbb{Q}^{n+k}, r \in \mathbb{Q}^+$$

  mit $p \in V' \subset V$. Dann ist auch

  $$f = f^{-1} \colon (V') \to M \cap V'$$

  eine Parametrisierung nahe p und M wird von abzählbar vielen solchen Koordinatenumgebungen $M \cap V'$ überdeckt. Die zugehörigen Umkehrabbildungen liefern einen abzählbaren C^∞-Atlas für M, bzw. Teilatlas für $\mathcal{A}$. Somit ist jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit auch eine C^∞-Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition 1.5

2 Differenzierbare Abbildungen

Sei im Folgenden M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit mit fest gewähltem C^∞-Atlas $\mathcal{A} = (M_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}$ (ohne Einschränkung maximal), der einen abzählbaren Teilatlas enthält, d.h. M sei eine C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit. Beispiel: $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit

$$\mathcal{A} = \left\{ x_\alpha = f_\alpha^{-1} \;\middle|\; f_\alpha \text{ Param. einer Koordinatenumgebung } M_\alpha \subset M \right\}$$

Offene Teilmengen $M' \subset M$ sind ebenfalls C^∞-Mannigfaltigkeiten mit der Spurtopologie und dem Atlas

$$\mathcal{A} = (M_\alpha \cap M', x_\alpha|_{M_\alpha \cap M'})_{\alpha\in A}$$

Für den $\mathbb{R}^n$ wählen wir stets den eindeutig bestimmten maximalen C^∞-Atlas, der $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ enthält. Dieser Atlas besteht aus allen C^∞-Diffeomorphismen $x' \colon M' \to U$ mit M', U offen in $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.1: Sei $f \colon M \to N$ eine Abbildung zwischen C^∞-differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit C^∞-Atlanten $(M_\alpha, x_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(N_\beta, y_\beta)_{\beta\in B}$. Wir nennen f *C^∞-differenzierbar*, falls es für jedes $p \in M$ Karten (M_α, x_α) für M um p und (N_β, y_β) für N um $f(p)$ gibt, so dass gilt

1. $f(M_\alpha) \subset N_\beta$
2. $y_\beta \circ f \circ x_\alpha^{-1} \colon x_\alpha(M_\alpha) \to y_\beta(N_\beta)$ ist eine C^∞-Abbildung (zwischen offenen Euklidischen Räumen).

Bemerkungen:

- Insbesondere ist jeweils $f|_{M_\alpha}$ stetig und damit f stetig (zwischen M und N als topologischen Hausdorff-Räumen).
- Die Differenzierbarkeit von f hängt nicht von der Wahl der Karten in Definition 2.1 ab.
- Ist $f \colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N, so ist auch jede Einschränkung $f|_{M'} \colon M' \to N$ auf eine offene Teilmenge $M' \subset M$ differenzierbar.
- $\mathrm{id} \colon M \to M$ ist immer differenzierbar.
- $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist differenzierbar als Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten genau dann, wenn f im gewöhnlichen Sinne eine C^∞-Abbildung ist.

Lemma 2.2: Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to O$ differenzierbare Abbildungen, so ist auch $g \circ f\colon M \to O$ differenzierbar.

Beweis: Nachrechnen.

Definition 2.3: Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten heißt ein C^∞-*Diffeomorphismus*, falls gilt:

1. f ist bijektiv
2. f ist differenzierbar im Sinne der Definition 2.1
3. f^{-1} ist differenzierbar

Existiert ein solcher Diffeomorphismus, so heißen M, N *diffeomorph*.

Bemerkungen:

1. Jede Karte $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^n$ des gegebenen C^∞-Atlas für M ist ein C^∞-Diffeomorphismus.
2. id_M ist ein Diffeomorphismus.
3. Ist f ein Diffeomorphismus, so auch f^{-1}.
4. Sind $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O$ zwei Diffeomorphismen, so auch $g \circ f$.
5. Nach (2), (3), (4) ist Diffeomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.
6. Auf dem selben M kann es zwei nicht miteinander verträgliche C^∞-Atlanten geben, die trotzdem zueinander diffeomorph sind. Beispiel in der Übung.
7. Es kann auf einer topologischen Mannigfaltigkeit unterschiedliche C^∞-Atlanten geben, die nicht zueinander diffeomorph sind. Berühmte Beispiele (Fields-Medaillen-würdig):
   - Auf $S^7 \subset \mathbb{R}^8$ gibt es bis auf Diffeomorphie genau 28 unterschiedliche differenzierbare Strukturen (die gewöhnliche der S^7 als Untermannigfaltigkeit sowie 27 weitere „exotische Sphären") (John Milnor)
   - Auf $\mathbb{R}^n, n \neq 4$ sind alle differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph; auf $\mathbb{R}^4$ gibt es unendlich viele paarweise nicht diffeomorphe C^∞-Atlanten (Michael Freedman)

8. Jede 1-dimensionale zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zum $\mathbb{R}$ oder zur $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

   BEISPIEL: $(-1,+1)$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten differenzierbaren Struktur, d.h. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}|_{(-1,+1)}$ und allen Karten, die mit id C^∞-verträglich sind. Diffeomorphismus zum $\mathbb{R}$:

   $$\psi\colon (-1,+1) \to \mathbb{R}, t \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$$

3 Tangentialräume

3.1 Geometrische Tangentialräume

Wir wollen die Begriffe des Tangentialraumes und des Differentials auf abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

DEFINITION: Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Auf

$$\left\{ c\colon I \xrightarrow{C^\infty} M \;\middle|\; I \text{ offenes Intervall um } 0,\, c(0) = p \right\}$$

(c heißt *Kurve in M ab p*) definiere die Äquivalenzrelation

$$c_1 \sim c_2 \iff \begin{array}{l}\text{Es existiert eine Karte } (M', x) \text{ um } p \text{, so dass} \\ (x \circ c_1)'(0) = (x \circ c_2)'(0)\end{array}$$

(Man rechnet leicht nach, dass das dann für jede andere Karte auch gilt.)

DEFINITION 3.1: Jede Äquivalenzklasse $[c]$ heißt ein *Tangentialvektor an M in p*. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p bezeichnen wir mit $\widetilde{T_pM}$ und nennen *(geometrischer) Tangentialraum an M in p*.

DEFINITION 3.2: Ist $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung und $p \in M$, so definiert man das *Differential* von f in p als die Abbildung

$$df_p\colon \widetilde{T_pM} \to \widetilde{T_{f(p)}N},\ [c] \mapsto [f \circ c]$$

BEMERKUNGEN:

1. df_p ist wohldefiniert, d.h. unabhängig vom gewählten Rerpäsentanten c der Äquivalenzklasse $[c]$. Beweis durch Nachrechnen.

2. Für jede Karte $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^n$ und p ist die Abbildung

$$\varphi_{x,p}\colon \widetilde{T_pM} \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto (x \circ c)'(0)$$

wohldefiniert (nach Definition der Äquivalenzrelation auf Kurven ab p) und injektiv (gleicher Grund), außerdem surjektiv (zu gegebenem $v \in \mathbb{R}^n$ betrachte die Kurve $c(t) = x^{-1}(x(p) + tv)$). Somit ist φ bijektiv und es gibt genau eine Vektorraumstruktur auf $\widetilde{T_pM}$, so dass φ ein Vektorraum-Isomorphismus wird. Jede andere Karte $\tilde{x}$ liefert dieselbe Vektorraumstruktur auf $\widetilde{T_pM}$, denn sie induziert eine bijektive Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{T_pM} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}([c]) &= (\tilde{x} \circ c)'(0) \\
&= D(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(p)}(x \circ c)'(0) \\
&= D(\tilde{x} \circ x^{-1})_{x(p)}\varphi([c])
\end{aligned}$$

d.h. $\tilde{\varphi}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus bezüglich obiger, mittels φ definierter Vektorraumstruktur auf $\widetilde{T_pM}$, also definiert $\tilde{\varphi}$ dieselbe Vektorraumstruktur auf $\widetilde{T_pM}$ wie φ.

3. Mit diesen (unhandlichen) Vektorraumstrukturen werden Differentiale lineare Abbildungen: Sei (N', y) Karte für N um $f(p)$, ferner

$$\psi\colon \widetilde{T_{f(p)}N} \to \mathbb{R}^{\dim N},\ [\gamma] \mapsto (y \circ \gamma)'(0)$$

die induzierte bijektive Abbildung und $\widetilde{T_{f(p)}N}$ mit der davon induzierten Vektorraumstruktur versehen. Dann gilt für $[c] \in \widetilde{T_pM}$:

$$\begin{aligned}
\psi \circ df_p[c] &= \psi[f \circ c] = (y \circ f \circ c)'(0) \\
&= ((y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ c))'(0) \\
&= D(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \circ \varphi([c])
\end{aligned}$$

Somit ist

$$df_p = \psi^{-1} \circ D(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \circ \varphi$$

eine lineare Abbildung bezüglich der Vektorraumstrukturen auf geometrischen Tangentialräumen gemäß Bemerkung (2).

4. Speziell für n-dimensionale Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$: Sei

$$f\colon U \to M \cap V, \quad U \text{ offen in } \mathbb{R}^n$$

eine Parametrisierung, $x = f^{-1}$ die zugehörige Karte und $u = x(p)$. Für differenzierbare Kurven $c, \tilde{c}$ ab p sind äquivalent:

$$\begin{aligned} & [c] = [\tilde{c}] \\ \iff \quad & (x \circ c)'(0) = (x \circ \tilde{c})'(0) \\ \overset{Df_u \text{ injektiv}}{\iff} \quad & Df_u(x \circ c)'(0) = Df_u(x \circ \tilde{c})'(0) \\ \iff \quad & c'(0) = \tilde{c}'(0) \end{aligned}$$

Man kann also $\widetilde{T_pM}$ einen Untervektorraum $T_pM \leq \mathbb{R}^{n+k}$ zuordnen. Die Abbildung $[c] \mapsto c'(0)$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Dies liefert die gewünschte Identifikation der beiden Konzepte der Tangentialvektoren.

Im Spezialfall $k = 0$ ist $Df_u \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+0}$ aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus für jedes $u \in U$. Somit gilt: T_pM ist ein n-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^{n+0}$, also $T_pM = \mathbb{R}^n$ und wir erhalten den Vektorraum-Isomorphismus

$$\widetilde{T_pM} \to \mathbb{R}^n, \; [c] \mapsto c'(0)$$

(Tangentialräume an offene Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ sind kanonisch isomorph zum $\mathbb{R}^n$).

3.2 Algebraische Tangentialräume

Da die Vektorraumstruktur auf $\widetilde{T_pM}$ (wie in Bem. 2) unhandlich ist, führt man ein algebraisches Konzept für Tangentialräume ein:

Definition: Setze

$$C^\infty(M) = \{ h \colon M \to \mathbb{R} \mid h \text{ ist } C^\infty\text{-differenzierbar} \}$$

Jedes $[c] \in \widetilde{T_pM}$ definiert eine „Richtungsableitung“ auf $C^\infty(M)$:

$$\partial_{[c]} \colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \; h \mapsto (h \circ c)'(0)$$

(unabhängig vom Repräsentanten).

Bemerkungen:

- $\partial_{[c]}$ ist linear
- $\partial_{[c]}$ erfüllt die Produktregel, d.h.

$$\partial_{[c]}(h \cdot \tilde{h}) = (\partial_{[c]}h) \cdot \tilde{h}(p) + h(p) \cdot (\partial_{[c]}\tilde{h})$$

Wir werden zeigen: die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{T_pM} & \to & \left\{ \delta\colon C^\infty(M) \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R} \;\middle|\; \delta \text{ Derivation in } p \right\} \\ [c] & \mapsto & \partial_{[c]} \end{array}$$

ist bijektiv und der Bildraum ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dies liefert die gesuchte Vektorraumstruktur auf dem Tangentialraum in p ohne Verwendung von Karten. Wir werden den algebraischen Tangentialraum als Bildraum der Abbildung definieren.

Definition 3.3: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Zwei C^∞-Funktionen $h_i\colon M_i \to \mathbb{R}, i = 1, 2$, auf offenen Umgebungen von p definiert, heißen *äquivalent*, falls auf einer genügend kleinen Umgebung von p gilt $h_1 = h_2$. Es bezeichne $C^\infty(M, p)$ den Raum der Äquivalenzklassen von nahe p definierten C^∞-Funktionen. Jedes Element $[h] \in C^\infty(M, p)$ heißt ein (C^∞) *Funktionskeim* in p.

Bemerkung: $C^\infty(M, p)$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra, d.h.

- Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{rcl} \lambda \circ [h] & = & [\lambda \circ h],\ \lambda \in \mathbb{R} \\ [h] + [\tilde{h}] & = & [h + \tilde{h}] \end{array}$$

  Dabei ist $h + \tilde{h}$ auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche definiert.

- Ein kommutativer Ring (mit Eins) mit obiger Addition und der Multiplikation

$$[h] \cdot [\tilde{h}] = [h \cdot \tilde{h}]$$

  Dabei ist Eins die Äquivalenzklasse der konstanten Eins-Funktion.

- Die obige Multiplikation ist $\mathbb{R}$-bilinear (bezüglich Vektorraum-Struktur)

Definition 3.4: Eine *Derivation* auf $C^\infty(M, p)$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\delta\colon C^\infty(M, p) \to \mathbb{R},$$

welche zusätzlich die Produktregel erfüllt, d.h. für alle $[h], [\tilde{h}] \in C^\infty(M, p)$ gilt

$$\delta([h \cdot \tilde{h}]) = \delta([h] \cdot [\tilde{h}]) = \delta([h]) \cdot \tilde{h}(p) + h(p) \cdot \delta([\tilde{h}])$$

Es bezeichne $\mathcal{D}(M, p)$ die Menge aller Derivationen auf $C^\infty(M, p)$ (*Derivationen in p*).

Bemerkung: $\mathcal{D}(M,p)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(\delta+\tilde{\delta})([h]) &= \delta([h])+\tilde{\delta}([h])\\ (\lambda\cdot\delta)([h]) &= \lambda\cdot\delta([h])\end{aligned}$$

für $\delta,\tilde{\delta}\in\mathcal{D}(M,p)$ und $h\in C^\infty(M,p)$.

Beispiel: Derivationen auf $C^\infty(M,p)$ sind alle Richtungsableitungen $\partial_{[c]}$ längs Tangentialvektoren $[c]\in\widetilde{T_pM}$, d.h.

$$\partial_{[c]}\colon C^\infty(M,p)\to\mathbb{R},\quad [h]\mapsto (h\circ c)'(0)$$

In der Tat sind die $\partial_{[c]}$ die einzigen Derivationen in p, siehe unten.

Für konkrete Berechnungen verwendet man Richtungsableitungen längs Koordinatenlinien: Sei

$$x\colon M'\to U,\ M' \text{ offen in } M,\, U \text{ offen in } \mathbb{R}^n$$

eine Karte um p und

$$c_i(t)=x^{-1}(x(p)+te_i)$$

die i-te Koordinatenlinie (bezüglich x) durch p. Diese liefert die Derivation

$$\begin{aligned}\partial_{[c_i]} &: C^\infty(M,p)\to\mathbb{R}\\ \partial_{[c_i]}([h]) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(h\circ c_i)(t)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(h\circ x^{-1})(x(p)+te_i)\\ &= \frac{\partial(h\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p))\end{aligned}$$

Definition 3.5: Ist $x\colon M'\to U\subset\mathbb{R}^n$ (mit $M'\subset M$) eine Karte um p, so definiert man für $i=1,\ldots,n=\dim M$ die Derivation

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p &: C^\infty(M,p)\to\mathbb{R}\\ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p([h]) &= \frac{\partial(h\circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p))\end{aligned}$$

Satz 3.6: Die $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathcal{D}(M,p)$ aller Derivationen in p.

Beweis:

- *Lineare Unabhängigkeit:* Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = 0 \in \mathcal{D}(M,p) \tag{*}$$

Wir schreiben die Karte $x = (x_1, \dots, x_n)\colon M' \to U \subset \mathbb{R}$ mit Koordinatenfunktionen $x_i\colon M' \to \mathbb{R}$ und definieren die *Projektionen*

$$\mathrm{pr}_i = x_i \circ x^{-1}\colon U \to \mathbb{R}$$

Es folgt allgemein:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p ([x_j]) = \frac{\partial(x_j \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p)) = \frac{\partial\,\mathrm{pr}_j}{\partial x_i}(x(p)) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{**}$$

Aus (*) folgt:

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)([x_j]) = \alpha_j \text{ für } j = 1, \dots, n$$

- *Erzeugendensystem:* Sei $\delta \in \mathcal{D}(M,p)$. *Behauptung:* für geeignete α_i ist

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

notwendigerweise von der Form

$$\alpha_j \overset{(**)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)([x_j]) = \delta([x_j])$$

Setze also

$$\delta^* = \delta - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

mit $\alpha_i = \delta([x_i])$. Für die konstante 1-Funktion gilt:

$$\begin{aligned} & \delta^*([1]) = \delta^*([1]\cdot[1]) = 1 \cdot \delta^*([1]) + \delta^*([1]) \cdot 1 \\ \Longrightarrow \quad & 0 = \delta^*([1]) = \delta^*([c]) \end{aligned}$$

für jede konstante Funktion c auf M. Für $j = 1, \dots, n$ folgt:

$$\begin{aligned} \delta^*([x_j - x_j(p)]) &= \delta^*([x_j]) \\ &= \delta([x_j]) - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)[x_j] = 0 \end{aligned} \tag{***}$$

Wir werden zeigen, dass jeder Funktionskeim $\varphi \in C^\infty(M,p)$ geschrieben werden kann in der Form

$$\varphi = \varphi(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i(p)) \cdot \psi_i \qquad (\star)$$

mit geeigneten $\psi_i \in C^\infty(M,p)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\delta^*(\varphi) &= \delta^*[\varphi(p)] + \sum_{i=1}^{n} \delta^*([(x_i - x_i(p)) \cdot \psi_i]) \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n} \{\delta^*([x_i - x_i(p)]) \cdot \psi_i(p) + (x_i(p) - x_i(p)) \cdot \delta^*(\psi_i)\} \\
&\overset{(***)}{=} 0
\end{aligned}$$

Somit gilt $\delta^* = 0$ bzw.

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta([x_i]) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Somit ist $\mathcal{D}(M,p)$ ein n-dimensionaler Raum mit Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\right)_{i=1}^{n}$. $\square$

Die Darstellung $(\star)$ ist nach Übergang zu $\tilde{\varphi} = \varphi \circ x^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, u^0)$ mit $u^0 = x(p)$ äquivalent zum folgenden Lemma:

Lemma 3.7: Sei $u^0 \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\varphi} \in C^\infty(B_\varepsilon(u^0))$ mit $\varepsilon > 0$. Dann existieren Funktionskeime $\tilde{\psi}_i \in C^\infty(B_\varepsilon(u^0))$ für $i = 1, .., n$, so dass für alle $u \in B_\varepsilon(u^0)$ gilt:

$$\tilde{\varphi}(u) = \tilde{\varphi}(u^0) + \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_i^0) \cdot \tilde{\psi}_i(u)$$

wobei $u_i = \mathrm{pr}_i(u) = (x_i \circ x^{-1})(u)$.

Beweis: Sei $u \in B_\varepsilon(u^0)$. Setze

$$g\colon [0,1] \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R},\ g(t) = \tilde{\varphi}((1-t)u^0 + tu)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(u) - \tilde{\varphi}(u^0) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u^i}((1-t)u^0 + tu) \cdot (u_i - u_i^0)dt
\end{aligned}$$

Die behauptete Identität ergibt sich also mit den Funktionen

$$\tilde{\psi}_i(u) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u^i}((1-t)u^0 + tu)dt$$

Nach dem Differentiationssatz für parameter-abhängige Integrale ist $\tilde{\psi}_i$ eine C^∞-Funktion, da der Integrand und seine partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung nach den u_j's jeweils stetige Funktionen von (t, u) sind. □

Bemerkungen:

1. Es gilt $\tilde{\psi}_i(u^0) = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u^i}(u^0)$.

2. Wäre $\tilde{\varphi} \in C^r(B_\varepsilon(u^0)), r \in \mathbb{N}$, so erhielte man $\tilde{\psi}_i \in C^{r-1}(B_\varepsilon(u^0))$. Deshalb scheitert für C^r-Funktionskeime bzw. Derivationen der Beweis des Satzes 3.6: Die lineare Unabhängigkeit funktioniert, aber kein Erzeugendensystem! In der Tat gilt:

$$\dim_{\mathbb{R}} \{\delta\colon C^r(M,p) \to \mathbb{R} \mid \delta \text{ Derivation } \} = \begin{cases} 0, & r = 0 \\ \infty, & r \in \mathbb{N} \\ n, & r = \infty \end{cases}$$

Definition/Korollar 3.8: Wir bezeichnen $T_pM = \mathcal{D}(M,p)$ als den *algebraischen Tangentialraum* von M in p. Die Abbildung

$$\delta\colon \widetilde{T_pM} \to T_pM,\ [c] \mapsto \partial_{[c]}$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus

Beweis: Die Vektorraum-Struktur auf $\widetilde{T_pM}$ war so definiert, dass für jede Karte $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^n$ um p gilt:

$$\varphi = \varphi_{x,p}\colon \widetilde{T_pM} \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto (x \circ c)'(0)$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Für jedes $h \in C^\infty(M,p)$[1] und jedes $[c] \in \widetilde{T_pM}$ gilt:

$$\begin{aligned} \partial_{[c]} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \circ c)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (h \circ x^{-1} \circ x \circ c)(t) \\ &= (D(h \circ x^{-1})_{x(p)} \circ \varphi)([c]) \end{aligned}$$

[1]Bei Funktionskeimen lassen wir im Folgenden die Klammern häufig weg.

Aus dieser Darstellung folgt wie gewünscht: ∂ ist linear zwischen n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Es reicht also zu zeigen, dass ∂ surjektiv ist. Betrachte die geometrischen Tangentialvektoren

$$[c_i] \in \widetilde{T_pM},\ c_i(t) = x^{-1}(x(p) + te_i)$$

Es gilt: $\partial_{[c_i]} = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, also liegt die Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\right)_{i=1}^n$ in Bild(∂) und ∂ ist surjektiv, wie behauptet. □

3.3 Differential

Definition 3.9: Ist $f\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung (zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten) und $p \in M$, so definiert man das *Differential*

$$df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$$

durch

$$(df_p(\delta))(h) = \delta(h \circ f)$$

für $\delta \in T_pM$, $h \in C^\infty(N, f(p))$.

Bemerkungen:

- Offenbar ist $df_p(\delta)$ eine Derivation auf N im Punkt $f(p)$, da δ linear ist. Weiter erfüllt $df_p(\delta)$ die Produktregel und ist linear.
- Die beiden Konzepte für Differentiale (zwischen geometrischen bzw. algebraischen Tangentialräumen) sind bei der Identifikation von geometrischen und algebraischen Tangentialvektoren mittels ∂ zueinander äquivalent, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.10: Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{T_pM} & \xrightarrow{\widetilde{df_p}} & \widetilde{T_{f(p)}N} \\
{\scriptstyle\partial^M}\big\downarrow{\scriptstyle\simeq} & & {\scriptstyle\simeq}\big\downarrow{\scriptstyle\partial^N} \\
T_pM & \xrightarrow{df_p} & T_{f(p)}N
\end{array}$$

Beweis: Für $[c] \in \widetilde{T_pM}$ ist zu zeigen:

$$(\partial^N \circ \widetilde{df_p})[c] = (df_p \circ \partial^M)[c] \in \mathcal{D}(N, f(p))$$

Dies überprüfen wir durch Anwendung auf einen beliebigen Funktionskeim $h \in C^\infty(N, f(p))$:

$$\begin{aligned}
\{(\partial^N \circ \widetilde{df_p})[c]\}(h) &= \{\partial^N([f \circ c])\}(h) \\
&= \partial_{[f\circ c]} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (h \circ f \circ c)(t) \\
&= \partial_{[c]}(h \circ f) \overset{\text{Def. 3.9}}{=} (df_p \circ \partial_{[c]})(h) \\
&= \{(df_p \circ \partial^M)([c])\}(h)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wegen 3.8 und 3.10 werden wir oft nicht zwischen geometrischen und algebraischen Tangentialvektoren bzw. Differentialen unterscheiden, d.h. je nach Fragestellung werden Tangentialvektoren mal als eine Kurve, mal als eine Derivation (auf Funktionskeimen) angesehen.

Beispiel: Ist $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^m$ mit $M' \subset M$ eine Karte um p, so ist

$$\left[df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)\right](\tilde{h}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (\tilde{h} \circ f) = \frac{\partial(\tilde{h} \circ f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p))$$

Lemma 3.11: Sei $f\colon M \to N$ differenzierbar, $p \in M$ und Karten $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^m$ um p bzw. $y\colon N' \to V \subset \mathbb{R}^n$ um $f(p)$ mit $f(M') \subset N'$ gegeben. Dann ist die Jacobimatrix $D(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die darstellende Matrix für $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ bezüglich der Basen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)_{i=1}^m \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p\right)_{j=1}^n$$

d.h. in der eindeutigen Darstellung

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{f(p)}$$

gilt

$$\alpha_{ki} = \frac{\partial(y_k \circ f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p)), \quad k = 1, \dots, n,\ i = 1, \dots, m$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_{li} &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\Big|_{f(p)}\right)(y_l) = \left(df_p \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right)(y_l) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p (y_l \circ f) = \frac{\partial(y_l \circ f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p))
\end{aligned}$$

Lemma 3.12:

1. Für $\mathrm{id}\colon M \to M$ und $p \in M$ ist $d\mathrm{id}_p = \mathrm{id}_{T_pM}$.
2. Sind $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to O$ differenzierbar und $p \in M$, so gilt
$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$
3. Ist $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus, so ist jedes Differential $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis:

1. Sei $v \in T_pM$, dann gilt für alle $h \in C^\infty(M,p)$:
$$\begin{aligned} & (d\mathrm{id}_p)(v)(h) = v(h \circ \mathrm{id}) = v(h) \\ \Longrightarrow\ & (d\mathrm{id}_p)(v) = v \text{ für alle } v \in T_pM \\ \Longrightarrow\ & d\mathrm{id}_p = \mathrm{id}_{T_pM} \end{aligned}$$
2. Für $\varphi \in C^\infty(O, g(f(p)))$ und $v \in T_pM$ gilt:
$$\begin{aligned} (dg_{f(p)} \circ df_p)(v)(\varphi) &= dg_{f(p)}(df_p(v))(\varphi) = df_p(v)(\varphi \circ g) \\ &= v(\varphi \circ (g \circ f)) = d(g \circ f)_p(v)(\varphi) \end{aligned}$$
3. Mit der differenzierbaren Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ laut (1) und (2) gilt:
$$\mathrm{id}_{T_{f(p)}N} = d(\mathrm{id}_N)_{f(p)} = d(f \circ f^{-1})_{f(p)} = df_p \circ (df^{-1})_{f(p)}$$
Genauso gilt
$$\mathrm{id}_{T_pM} = d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p$$
Also sind df_p und $d(f^{-1})_{f(p)}$ zueinander inverse Isomorphismen.

Bemerkungen:

- Ist umgekehrt $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Vektorraum-Isomorphismus, so ist nach 3.11 die darstellende Matrix $D(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)}$ invertierbar. Mit dem Umkehrsatz folgt: $y \circ f \circ x^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus nahe $x(p)$. Da x und y Diffeomorphismen sind, folgt: f ist ein Diffeomorphismus nahe p.

- Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine unendlich oft stetig partiell differenzierbare Abbildung, so können wir T_uU für $u \in U$ identifizieren mit $\mathbb{R}^n$ (ebenso $T_{f(u)}\mathbb{R}^m$ mit dem $\mathbb{R}^m$) und $df_u\colon T_uU \to T_{f(u)}\mathbb{R}^m$ identifizieren mit der Jacobimatrix $Df_u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vermittels des Vektorraum-Isomorphismus
$$\mathbb{R}^n \to T_uU, \quad e_i \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_u$$
Für differenzierbares $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ ist somit das folgende Diagramm kommutativ:
$$\begin{array}{ccc} T_uU & \xrightarrow{df_u} & T_{f(u)}\mathbb{R}^m \\ \simeq\Big\uparrow & & \Big\uparrow\simeq \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Df_u} & \mathbb{R}^m \end{array}$$
Also sind bei Identifikation von T_uU bzw. $T_{f(u)}\mathbb{R}^m$ mit den umgebenden Vektorräumen df_u und Df_u „gleich“.

4 Vektorfelder

Definition 4.1: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1. Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume T_pM mit $p \in M$ heißt das *Tangentialbündel* TM von M
2. Die *kanonische Projektion* $\pi\colon TM \to M$ ist gegeben durch $\pi(v) = p$, falls $v \in T_pM \subset TM$.
3. Eine Abbildung $X\colon M \to TM$ heißt ein *Vektorfeld* auf M, falls für alle $p \in M$ gilt: $X(p) \in T_pM$ (mit anderen Worten $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$)

Bemerkungen:

1. Ist $X\colon M \to TM$ ein Vektorfeld und (M', x) eine Karte (des fest gewählten maximalen differenzierbaren Atlas), so ist für jedes $q \in M'$ eine Basis von T_qM gegeben durch $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_q\right)_{i=1}^n$. Dies ergibt die eindeutige Darstellung
$$X(q) \;=\; \sum_{i=1}^n \alpha_i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q, \quad \alpha_i\colon M' \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$$
Dabei gilt $\alpha_i(q) = X(q)([x_i])$. Die α_i's werden benutzt, um Stetigkeit und Differenzierbarkeit von X zu definieren.

2. Ist (M', x) eine Karte für M und

$$TM|_{M'} = \pi^{-1}(M') = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \;\middle|\; p \in M', \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n \right\}$$

so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{x} \colon TM|_{M'} &\to x(M') \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p &\mapsto (x(p), \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

bijektiv. Man kann nun zeigen:

- Es gibt genau eine Topologie auf TM, so dass alle $TM|_{M'}$ offen und alle $\hat{x}$ Homöomorphismen sind. Diese Topologie ist Hausdorffsch.
- Alle $(TM|_{M'}, \hat{x})$ bilden einen C^∞-Atlas für TM mit abzählbarem Teilatlas.

Daraus folgt: TM ist eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 4.2: Ein Vektorfeld $X \colon M \to TM$ heißt *differenzierbar* bzw. *stetig*, falls um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte (M', x) existiert, so dass die Koeffizientenfunktionen α_i der Darstellung

$$X(q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(q) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_q, \quad q \in M'$$

C^∞-differenzierbar bzw. stetig sind.

Bemerkung: Die Koeffizientenfunktionen sind dann automatisch für jede Karte differenzierbar bzw. stetig. (Hinweis: Berechne $X(q)([\tilde{x}_i])$).

4.1 Derivationen

Wir betrachten hier einen zweiten Zugang zu den differenzierbaren Vektorfeldern. Zuerst einige technische Lemmata:

Lemma 4.3: Sei $u_0 \in \mathbb{R}^n$ und $0 < r < R$. Dann existiert eine Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass gilt:

- $0 \leq \psi \leq 1$

- $\psi(u) \equiv 1$ für alle $u \in \overline{B_r(u_0)}$
- $\psi(u) \equiv 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(u_0)}$

Beweisidee: Definiere $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq r \\ e^{-\frac{1}{t-r}} \cdot e^{-\frac{1}{R-t}}, & t \in (r, R) \\ 0, & t \geq R \end{cases}$$

Diese Funktion ist C^∞. Definiere nun

$$c = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt$$

und setze

$$\tilde{\varphi}(t) = 1 - \int_0^t \frac{\varphi(s)}{c} ds$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung ist dies wieder eine C^∞-Funktion. Setze

$$\psi(u) = \tilde{\varphi}(\|u - u_0\|)$$

Korollar 4.4: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p_0 \in M$ und W eine offene Umgebung von p_0. Dann existiert eine abgeschlossene Umgebung A von p_0 und eine C^∞-Funktion $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ mit

- $0 \leq \varphi \leq 1$
- $\varphi|_A \equiv 1$
- $\varphi|_{M \setminus W} \equiv 0$

Beweis: Wähle eine Karte $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^n$ (mit $M' \subset W$) um p_0. Sei $u_0 = x(p_0)$ und $0 < r < R < \varepsilon$, so dass $B_\varepsilon(u_0) \subset U$. Wähle eine Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wie in 4.3, dann ist

$$\varphi\colon M \to \mathbb{R},\ \varphi(q) = \begin{cases} \psi(x(q)), & q \in M' \\ 0, & q \in M'' = M \setminus x^{-1}(\overline{B_R(u_0)}) \end{cases}$$

wohldefiniert: Ist $q \in M' \cap M''$, so ist $\|x(q) - u_0\| > R$, also $\psi(x(q)) = 0$. Weiter ist diese Funktion C^∞ auf M' und auf M'', also auch auf $M = M' \cup M''$. Offenbar gilt 4.4 mit $A = x^{-1}(\overline{B_r(u_0)})$.

BEMERKUNG: Dieses A ist sogar eine kompakte Umgebung von p_0.

KOROLLAR 4.5: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p_0 \in M$, dann gilt:

1. Jeder Funktionskeim in $C^\infty(M, p_0)$ besitzt einen Repräsentanten $h \in C^\infty(M)$.

2. Es gibt eine Karte (M', x) um p_0, so dass alle $x_i \colon M' \to \mathbb{R}$ zu C^∞-Funktionen auf ganz M fortsetzbar sind.

BEWEIS:

1. Sei $\tilde{W}$ offene Umgebung von p_0 in M und $\tilde{h} \in C^\infty(\tilde{W})$. Wähle offene Umgebung W von p_0 mit $\overline{W} \subset \tilde{W}$.[2] Sei eine Umgebung $A = \overline{A} \subset W$ um p_0 und eine C^∞-Funktion $\varphi \colon M \to \mathbb{R}$ wie in Korollar 4.4. Setze

$$h \colon M \to \mathbb{R},\ h(g) = \begin{cases} \tilde{h} \cdot \varphi(q), & q \in \tilde{W} \\ 0, & q \in M \setminus \overline{W} \end{cases}$$

Analog zu 4.4 gilt: h ist wohldefiniert und C^∞ auf ganz M. Da φ nahe p_0 konstant gleich 1 ist, gehören $\tilde{h}$ und $h \in C^\infty(M)$ zum selben Funktionskeim.

2. Wähle eine Karte $(\tilde{W}, \tilde{x})$ um p_0. Konstruiere $A = \overline{A} \subset W \subset \overline{W} \subset \tilde{W}$ und $\varphi \in C^\infty(M)$ wie in (1). Für jede offene Umgebung $M' \subset A$ von p_0 gilt dann:

   - $(M', \tilde{x}|_{M'})$ ist eine Karte um p_0.
   - Die Funktionen

$$\hat{x}_i \colon M \to \mathbb{R},\ \hat{x}_i(q) = \begin{cases} \tilde{x}_i(q) \cdot \varphi(q), & q \in \tilde{W} \\ 0, & q \in M \setminus \overline{W} \end{cases}$$

     sind C^∞-Fortsetzungen der Komponentenfunktionen $x_i = \tilde{x}_i|_{M'}$. □

DEFINITION 4.6: Für jedes differenzierbare Vektorfeld $X \colon M \to TM$ und jede Funktion $h \in C^\infty(M)$ definiert man die *Richtungsableitung* von h längs X durch

$$X(h) \colon M \to \mathbb{R},\ X(h)(q) = X(q)([h])$$

BEMERKUNGEN:

[2] Dabei ist $\overline{W}$ definiert als Schnitt aller abgeschlossenen $B \supset W$.

- In jeder Karte (M', x) schreibt sich

$$X(q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q$$

mit $\alpha_i \in C^\infty(M)$; daher ist

$$q \mapsto X(h)(q) = X(q)([h]) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(q) \frac{\partial(h \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(q))$$

jeweils eine C^∞-Funktion auf M (zur Überprüfung verknüpfe mit x^{-1}).

- Die von X induzierte Abbildung

$$C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ h \mapsto X(h)$$

ist $\mathbb{R}$-linear und erfüllt die Produktregel:

$$X(h \cdot \tilde{h})(q) = X(h)(q) \circ \tilde{h}(q) + h(q) \cdot X(\tilde{h})(q)$$

Definition 4.7: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- Wir bezeichnen den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller differenzierbaren Vektorfelder $X\colon M \to TM$ als $\mathcal{V}M$.

- Eine Abbildung $\delta\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ heißt eine *Derivation* auf M, falls sie $\mathbb{R}$-linear ist und die Produktregel erfüllt:

$$\forall h, \tilde{h} \in C^\infty(M)\colon\ \delta(h \cdot \tilde{h}) = \delta(h) \cdot \tilde{h} + h \cdot \delta(\tilde{h})$$

Sei $\mathcal{D}M$ der Vektorraum aller Derivationen auf M.

Bemerkung: Nach obiger Bemerkung (2) induziert jedes C^∞-Vektorfeld $X \in \mathcal{V}M$ eine Derivation $X(\cdot)\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Satz 4.8: Die Abbildung

$$\mathcal{V}M \to \mathcal{D}M,\ X \mapsto X(\cdot)$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus

Beweis:

0. Die Linearität ist trivial.

1. Definiere eine Abbildung $\mathcal{D}M \to \mathcal{V}M,\ \delta \mapsto X_\delta$ wie folgt: Für $p \in M$ wird $X_\delta(p)$ definiert durch

$$X_\delta(p)([h]) = \delta(h)(p)$$

wobei h als Repräsentant des Funktionskeims in $C^\infty(M)$ gewählt wird (siehe 4.5). Es ist nachzuweisen:

   (a) *Wohldefiniertheit.* Seien $h, \tilde{h} \in C^\infty(M)$ zwei Repräsentanten desselben Funktionskeims, etwa mit $h - \tilde{h}|_W \equiv 0$ für eine offene Umgebung W von p. Wähle ein $\varphi \in C^\infty(M)$ mit $\varphi(p) = 1$ und $\varphi|_{M\setminus W} \equiv 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta((h - \tilde{h}) \cdot \varphi)(p) \\ &= \delta(h - \tilde{h})(p) \cdot \varphi(p) + (h - \tilde{h})(p) \cdot \delta(\varphi)(p) \\ &= (\delta(h) - \delta(\tilde{h}))(p) = \delta(h)(p) - \delta(\tilde{h})(p) \end{aligned}$$

   Also ist $X_\delta(p)$ eine wohldefiniertes Element von $\mathcal{D}(M, p)$, d.h. wir erhalten eine Abbildung $X_\delta\colon M \to TM$ mit $\pi \circ X_\delta = \mathrm{id}_M$, d.h. ein Vektorfeld auf M.

   (b) *Differenzierbarkeit von X_δ.* Sei $p \in M$. Sei (M', x) mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Karte um p mit der Eigenschaft: Alle x_i lassen sich zu C^∞-Funktionen $\tilde{x}_i\colon M \to \mathbb{R}$ fortsetzen (gemäß 4.5). Wir schreiben für $q \in M$

$$X_\delta(q) = \sum_i \alpha_i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q$$

   mit Koeffizientenfunktionen

$$\alpha_i(q) = X_\delta(q)([x_i]) = X_\delta(q)([\tilde{x}_i]) = \delta(\tilde{x}_i)(q)$$

   Also sind die $\alpha_i\colon M' \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Nach Definition 4.2 ist, da $p \in M$ beliebig gewählt war, X_δ ein differenzierbares Vektorfeld, d.h. $X_\delta \in \mathcal{V}M$.

2. Einsetzen ergibt direkt, dass die Abbildung $\delta \mapsto X_\delta$ die Umkehrabbildung von $X \mapsto X(\cdot)$ ist. Also sind beide Abbildungen zueinander inverse Vektorraum-Isomorphismen. $\square$

4.2 Lieklammer

Kompositionen von Derivationen $X(\cdot), Y(\cdot) \in \mathcal{D}M$ sind offenbar linear, aber im allgemeinen keine Derivationen mehr:

$$\begin{aligned} X(Y(h \cdot \tilde{h})) &= X(Y(h) \cdot \tilde{h} + h \cdot Y(\tilde{h})) \\ &= X(Y(h)) \cdot \tilde{h} + Y(h) \cdot X(\tilde{h}) + X(h) \cdot Y(\tilde{h}) + h \cdot X(Y(\tilde{h})) \end{aligned}$$

Die Summanden 2 und 3 stören die Produktregel für $h \mapsto X(Y(h))$. Es folgt:

$$\begin{aligned} X(Y(h \cdot \tilde{h})) - Y(X(h \cdot \tilde{h})) &= (X(Y(h)) - Y(X(h))) \cdot \tilde{h} \\ &\quad + h \cdot (X(Y(\tilde{h})) - Y(X(\tilde{h}))) \end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung

$$X(\cdot) \circ Y(\cdot) - Y(\cdot) \circ X(\cdot) \colon\; C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

eine Derivation, d.h. von der Form $Z(\cdot)$ für ein bestimmtes C^∞-Vektorfeld Z auf M.

Definition/Korollar 4.9: Seien X, Y differenzierbare Vektorfelder auf M. Dann gibt es genau ein differenzierbares Vektorfeld $Z \in \mathcal{V}M$, so dass für alle $\varphi \in C^\infty(M)$ gilt

$$Z(\varphi) = X(Y(\varphi)) - Y(X(\varphi))$$

Wir schreiben $Z = [X, Y]$ und nennen Z die *Lieklammer* von X und Y.

Zur lokalen Darstellung von $[X, Y]$ in einer Karte (M', x): Seien (lokal)

$$X = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Z = \sum_k \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Dann berechnen sich die γ_k wie folgt: Für $q \in M'$ gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_k(q) &= Z(q)([x_k]) = Z(x_k)(q) \\ &= X(Y(x_k))(q) - Y(X(x_k))(q) = X(\beta_k)(q) - Y(\alpha_k)(q) \\ &= \left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(\beta_k)(q) - \left(\sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\alpha_k)(q) \\ &= \sum_i \alpha_i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q (\beta_k) - \sum_j \alpha_j(q) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_q (\alpha_k) \\ &= \sum_i \left[\alpha_i(q) \cdot \frac{\partial(\beta_k \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(q)) - \beta_i(q) \cdot \frac{\partial(\alpha_k \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(q))\right] \end{aligned}$$

Formel: Man kann schreiben

$$\left[\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_k \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

wobei

$$\gamma_k = \sum_i \left[\alpha_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\beta_k) - \beta_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_k)\right]$$

Bemerkung: Einführung der Lieklammer ohne Betrachtung von Derivationen ist möglich wie folgt:

1. Definiere $Z = [X, Y]$ auf M' durch Angabe der Koeffizientenfunktionen γ_k nach obiger Formel.
2. Zeige, dass sich in jeder Karte um p dasselbe $Z(p)$ ergibt.

Lemma 4.10: Das (Lie)-Klammerprodukt $[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$ ist

1. bilinear
2. schiefsymmetrisch, d.h. $[X, Y] = -[Y, X]$
3. erfüllt die *Jacobiidentität*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$$

4. erfüllt

$$\begin{aligned} [X, h \cdot Y] &= X(h) \cdot Y + h \cdot [X, Y] \\ [h \cdot X, Y] &= -Y(h) \cdot X + h \cdot [X, Y] \end{aligned}$$

5. auf Kartenumgebungen gilt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$$

Beweis:

1,2 Folgt sofort aus der Definition

3. Für jedes $\varphi \in C^\infty(M)$ gilt

$$\begin{aligned}
& [X,[Y,Z]](\varphi) + [Z,[X,Y]](\varphi) + [Y,[Z,X]](\varphi) \\
= \;& X([Y,Z](\varphi)) - [Y,Z](X(\varphi)) + \ldots + \ldots \\
= \;& X(Y(Z(\varphi))) - X(Z(Y(\varphi))) - Y(Z(X(\varphi))) + Z(Y(X(\varphi))) \mp \ldots \\
= \;& 0 \text{ (durch Nachrechnen)}
\end{aligned}$$

4. Es gilt

$$\begin{aligned}
[X, h\cdot Y](\varphi) &= X(h\cdot Y(\varphi)) - h\cdot Y(X(\varphi)) \\
&= X(h)\cdot Y(\varphi) + h\cdot X(Y(\varphi)) - h\cdot Y(X(\varphi)) \\
&= (X(h)\cdot Y)(\varphi) - h\cdot [X,Y](\varphi)
\end{aligned}$$

Mit (2) gilt:

$$\begin{aligned}
[h\cdot X, Y] &= -[Y, h\cdot X] = -Y(h)\cdot X - h\cdot [Y,X] \\
&= -Y(h)\cdot X + h\cdot [X,Y]
\end{aligned}$$

5. Für $\varphi \in C^\infty(M)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi) = \frac{\partial(\varphi \circ x^{-1})}{\partial x_i} \circ x$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right](\varphi) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi)\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(\varphi\circ x^{-1})}{\partial x_j}\circ x\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(\varphi\circ x^{-1})}{\partial x_i}\circ x\right) \\
&= \frac{\partial^2(\varphi\circ x^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}\circ x - \frac{\partial^2(\varphi\circ x^{-1})}{\partial x_j \partial x_i}\circ x \\
&\equiv 0
\end{aligned}$$

DEFINITION: Ein Vektorraum mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon V\times V \to V$, für die zusätzlich gilt:

- $[v,w] = -[w,v]$ für alle $v,w \in V$ (*Schiefsymmetrie*)
- $[v,[w,z]] + [w,[z,v]] + [z,[v,w]] = 0$ für alle $v,w,z \in V$ (*Jacobi-Identität*)

heißt eine *Liealgebra* (über dem gegebenen Körper).

BEISPIELE:

- $V = \mathcal{V}M, [\cdot,\cdot]$ Lieklammer von Vektorfeldern.
- $V = \mathrm{End}(W)$ mit einem Vektorraum W und $[A,B] = A \cdot B - B \cdot A$.
- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ eine assoziative $\mathbb{R}$-Algebra, $[a,b] = a \cdot b - b \cdot a$
- Links/Rechtsinvariante Vektorfelder auf

$$SO(n) = O(n) \cap \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; \det A > 0 \right\}$$

4.3 Integralkurven

Definition: Für eine C^∞-Kurve $c\colon I \to M$ ist die *Ableitung* $c'(s) \in T_{c(s)}M$ definiert als die Richtungsableitung

$$c'(s) = \partial_{[t \mapsto c(s+t)]} \in \mathcal{D}(M, c(s)) = T_{c(s)}M$$

Bemerkung: Ist (M', x) eine Karte von M um $c(s)$, so berechnet man

$$\begin{aligned} c'(s) &= \sum_i c'(s)(x_i) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(s)} \\ &= \sum_i (x_i \circ c)'(s) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(s)} = \sum_i \tilde{c}'(s) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(s)} \end{aligned}$$

wobei definiert wird

$$\tilde{c}(t) \;=\; (x \circ c)(t)$$

Definition 4.11: Sei $X \in \mathcal{V}M$. Eine Kurve $c\colon I \to M$ heißt *Integralkurve* von X, falls für alle $s \in I$ gilt:

$$c'(s) = X(c(s)) \in T_{c(s)}M$$

Lemma 4.12: Sei $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte für M,

$$X = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{V}M'$$

mit $\alpha_i \in C^\infty(M')$ und das (assoziierte) Vektorfeld auf U gegeben als

$$\tilde{X}\colon U \to \mathbb{R}^n,\ \tilde{X}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \circ x^{-1}(u) \\ \vdots \\ \alpha_n \circ x^{-1}(u) \end{pmatrix}$$

Ferner sei $c\colon I \to M'$ eine differenzierbare Kurve und $\tilde{c} = x \circ c\colon I \to U$. Dann sind äquivalent:

1. c ist Integralkurve von X
2. Für $s \in I$ gilt: $\tilde{c}'(s) = \tilde{X}(\tilde{c}(s))$, d.h. $\tilde{c}$ ist Integralkurve von $\tilde{X}$ auf U.

Beweis: Durch Nachrechnen.

Bemerkung: Für assoziierte Vektorfelder $X, \tilde{X}$ wie oben gilt

$$X(p) = (dx^{-1})_{x(p)}\tilde{X}(x(p)) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{X}(u) = (dx)_{x^{-1}(u)}X(x^{-1}(u))$$

Bemerkung: Setzt man $f\colon U \to \mathbb{R}^n,\ f(u) = \tilde{X}(u)$, so ist f eine C^∞-Abbildung und (2) bedeutet: $s \mapsto \tilde{c}(s)$ ist Lösung der autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(s) = f(y(s)) \tag{*}$$

Da f eine C^∞-Funktion ist, ist f lokal Lipschitz in y, d.h. für alle y_0 gibt es eine Umgebung V_0 und eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $y_1, y_2 \in V_0$ gilt

$$\|f(y_1) - f(y_2)\| \leq C\,\|y_1 - y_2\|$$

Somit ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz über gewöhnliche Differentialgleichungen anwendbar und liefert: Zu jedem Anfangswert $u \in U$ gibt es genau eine maximale (nicht fortsetzbare) Lösung $\tilde{c}^u\colon I_u \to U$ für (*) mit einem offenen Interval $I_u \subset \mathbb{R}$ um 0 und $\tilde{c}^u(0) = u$. Es lässt sich zeigen, dass $(t, u) \mapsto \tilde{c}^u(t)$ eine auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R} \times U$ definierte C^∞-Funktion ist (mit $\{0\} \times U$ enthalten im Definitionsbereich).

Verknüpfung der so gewonnenen Lösungen $(t, u) \mapsto \tilde{c}^u(t)$ für (*) liefert mit 4.12:

Satz 4.13: Sei $X \in \mathcal{V}M, p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung M' von p, ein $\varepsilon > 0$ und eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times M' \to M,\ (t, q) \mapsto \varphi_t(q)$$

mit den Eigenschaften:

1. Für jedes $q \in M'$ ist $t \mapsto \varphi_t(q)$ eine Integralkurve von X ab $\varphi_0(q) = q$.
2. Es gilt $\varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q)$ für alle s, t und q mit $|s|, |t|, |s + t| < \varepsilon$ und $q \in M'$ sowie $\varphi_s(q) \in M'$.

Zum Beweis von (2): $t \mapsto \varphi_t(\varphi_{s_0}(q))$ und $t \mapsto \varphi_{t+s_0}(q)$ sind beides Integralkurven ab $\varphi_{s_0}(q)$.

Definitionen: Die Familie $\{\varphi_t \colon M' \to M\}_{|t|<\varepsilon}$ nennt man *lokaler Fluss* des Vektorfeldes X. (Interpretation: X_q ist ein Geschwindigkeitsvektor des Teilchens bei q und $\varphi_t(q)$ nach der Zeit t erreichter Ort des Teilchens.) Lässt sich $\varepsilon = \infty$ und $M' = M$ wählen, dann heißt X *vollständig*. In diesem Fall ist jedes $\varphi_t \colon M \to M$ ein Diffeomorphismus, weil φ_{-t} die Umkehrabbildung ist zu φ_t.

Die Abbildung $(\mathbb{R}, +) \to (\mathrm{Diffeo}(M), \circ)$, $t \mapsto \varphi_t$ ist wegen (2) ein Gruppenhomomorphismus, eine sogenannte 1-*Parameter-Gruppe* von Diffeomorphismen von M oder auch ein *dynamisches System* auf M.

Beispiele:

- Ist $X \equiv 0$, so ist X vollständig und $\varphi_t = \mathrm{id}_M$ für alle t
- Gibt es ein Kompaktum $K \subset M$ mit $X|_{M \setminus K} \equiv 0$, dann ist X vollständig. Insbesondere ist jedes $X \in \mathcal{V}M$ vollständig, falls M kompakt ist.

Bemerkung: Lokale Flüsse $\{\varphi_t \colon M' \to M\}_{|t|<\varepsilon}$ von einem Vektorfeld X bzw. $\{\psi_t\}$ von einem Vektorfeld Y führen zu einer weiteren Beschreibung von Lieklammern. Es gilt:

$$\begin{aligned} [X,Y](p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)} Y(\varphi_t(p)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}}(p) \end{aligned}$$

Übung: Zeige für $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, dass für beliebige s, t gilt: $\varphi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_s$. Daraus folgt:

$$\psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}}(p) \equiv p$$

Tatsächlich sind äquivalent:

1. $[X,Y] \equiv 0$
2. Die lokalen Flüsse von X und Y kommutieren.

5 Riemannsche Metriken

Definition 5.1:

- Sei M eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *Riemannsche Metrik* (kurz: *Metrik*) auf M ist eine Familie $g = (g_p)_{p \in M}$ von positiv definiten, symmetrischen Bilinearformen (Skalarprodukten)

$$g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

die im folgenden Sinne „differenzierbar von p abhängt“: Für je zwei differenzierbare Vektorfelder $X, Y \in M$ ist die Abbildung

$$g(X,Y) \colon M \to \mathbb{R},\ p \mapsto g_p(X(p), Y(p))$$

differenzierbar, also eine C^∞-Funktion. Das Paar (M, g) heißt dann eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

- Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und (M', x) eine Karte (des maximalen C^∞-Atlas), so heißen für $i, j \in n\rfloor$ die Funktionen

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) : M' \to \mathbb{R}$$

die *Koeffizienten* Riemannscher Metrik g bezüglich der Karte (M', x).

Bemerkungen:

- Ist g eine fest gewählte Riemannsche Metrik, so schreibe auch
  - $\langle v, w\rangle_p$ anstelle von $g_p(v, w)$ für $v, w \in T_pM$
  - $\langle X, Y\rangle$ anstelle von $g(X, Y)$ für $X, Y \in \mathcal{V}M$
  - $\langle X, Y\rangle_p$ oder $g_p(X, Y)$ anstelle von $g_p(X(p), Y(p))$

  Wir setzen außerdem

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{g_p(v,v)} \text{ für } v \in T_pM \\ \|X\| &= \sqrt{g(X,X)} \colon M \to [0, \infty) \end{aligned}$$

- In der Notation von 5.1 gilt $g_{ij} = g_{ji}$ für alle $i, j \in n\rfloor$ und für jedes $p \in M'$ ist $(g_{ij}(p))_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die darstellende (Gramsche) Matrix der Bilinearform g_p bezüglich der Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\right)_{i=1}^n$ von T_pM. Diese Matrix ist symmetrisch und positiv definit.

Lemma 5.2: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $g = (g_p)_{p\in M}$ Familie der Skalarprodukte g_p auf T_pM. Dann sind äquivalent:

1. g ist Riemannsche Metrik, d.h. die g_p sind differenzierbar von p abhängig.
2. Um jedes $p \in M$ existiert eine Karte (M', x), so dass alle g_{ij} differenzierbar sind.

Bemerkung: Punkt (2) gilt dann automatisch für jede C^∞-Karte $(\tilde{M}, \tilde{x})$ um p, d.h. es folgt, dass auch die $\tilde{g}_{ij}$ nahe p differenzierbar sind.

Beweis:

(2) $\Rightarrow$ (1) Es gelte (2). Seien $X, Y \in \mathcal{V}M$. Zu zeigen ist: Für $p \in M$ ist die Funktion $g(X,Y)\colon M \to \mathbb{R}$ differenzierbar nahe p. Sei dazu (M', x) eine Karte um p wie in (2), d.h. mit differenzierbaren g_{ij}'s. Dann gilt für $q \in M'$:

$$X(q) = \sum_i \alpha_i(q) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q, \quad Y(q) = \sum_j \beta_j(q) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_q$$

mit C^∞-Funktionen $\alpha_i, \beta_j\colon M' \to \mathbb{R}$. Es folgt:

$$g(X,Y)(q) \quad = \quad g_q(X(q), Y(q)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i(q)\beta_j(q) g_{ij}(q)$$

und somit (1), da laut (2) g_{ij} differenzierbar sind.

(1) $\Rightarrow$ (2) Es gelte (1), d.h. $g(X,Y)\colon M \to \mathbb{R}$ ist C^∞ für beliebige differenzierbare Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}M$. Sei $p \in M$ und $(\tilde{W}, \tilde{X})$ eine Karte um p. Wie in 4.5(2) konstruiert man Umgebungen $A = \bar{A} \subset W \subset \bar{W} \subset \tilde{W}$ von p und eine C^∞-Funktion $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\varphi|_A \equiv 1$ und $\varphi|_{M\setminus W} \equiv 0$. Sei M' beliebige offene Umgebung von p mit $M' \subset A$ und $x = \tilde{x}|_{M'}$, dabei ist $x(M')$ offen in $\mathbb{R}^n$. Seien $i, j \in n\rfloor$ und Vektorfelder $X_k\colon M \to TM$, $k \in n\rfloor$ gegeben durch

$$X_k(q) = \begin{cases} \varphi(q) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k}\right|_q, & \text{falls } q \in \tilde{W} \\ 0 \in T_qM, & \text{falls } q \in M \setminus \bar{W} \end{cases}$$

Nach Voraussetzung (1) ist die Funktion $g(X_i, X_j)$ differenzierbar. Wegen $g_{ij} = g(X_i, X_j)|_{M'}$ und $\varphi|_{M'} \equiv 1$ ist auch $g_{ij}\colon M' \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Beispiele:

- Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir identifizieren wie bisher Tangentialräume an M mit Teilräumen des $\mathbb{R}^{n+k}$. Dann definiert für jedes $p \in M$ die Abbildung

$$g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ (v,w) \mapsto \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^{n+k}}$$

eine Riemannsche Metrik auf M (Übung), die sogenannte *1. Fundamentalform* der Untermannigfaltigkeit.

- Ist $M = U$ offen in $\mathbb{R}^n$ und sind für $i, j \in n\rfloor$ differenzierbare Funktionen $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ji}$ gegeben, so dass für jedes $u \in U$ die Matrix $(\tilde{g}_{ij}(u))_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist, dann definiert

$$g_u\left((v_1, \dots, v_n)^T, (w_1, \dots, w_n)^T\right) = v^T \cdot (\tilde{g}_{ij}(u))_{ij} \cdot w$$

eine Riemannsche Metrik auf U. Mit der Identifikation $T_uU \simeq \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardkarte $x = \mathrm{id}_U$ gilt $\frac{\partial}{\partial x_i}|_u = e_i$, die Koeffizienten der Metrik bezüglich der Karte (U, x) stimmen mit den $\tilde{g}_{ij}$ überein. Nach Lemma 5.2 beweist das, dass $(g_u)_{u\in U}$ differenzierbar von u abhängt und damit eine Riemannsche Metrik auf U ist.

- Klassisches Beispiel: Seien

$$U = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_n > 0\} \text{ und } (\tilde{g}_{ij}(u))_{ij} = \frac{1}{u_n^2} E_n$$

Dann ist

$$g_u(v, w) = \frac{\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^n}}{u_n^2}$$

Es ergibt sich ein n-dimensionaler *hyperbolischer Raum*.

5.1 Isometrien

Definition 5.3: Seien (M, g) und $(N, \tilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $f\colon M \to N$ heißt *Isometrie*, falls für alle $p \in M$ und $v, w \in T_pM$ gilt:

$$g_p(v, w) = \tilde{g}_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)) \qquad (*)$$

Ist f ein *lokaler* Diffeomorphismus, d.h. df_p ist ein Vektorraum-Isomorphismus für alle $p \in M$, so heißt f *lokale Isometrie*.

Bemerkungen:

- Offensichtlich ist mit f auch f^{-1} eine Isometrie.
- Sind $f\colon (M,g) \to (N,\tilde{g})$ und $h\colon (N,\tilde{g}) \to (O,\hat{g})$ Isometrien, so auch $f \circ h$. Insbesondere ist
$$\mathrm{Isom}(M,g) = \{\, f\colon (M,g) \to (M,g) \mid f \text{ ist Isometrie } \}$$
eine Untergruppe von $(\mathrm{Diffeo}(M), \circ)$.
- Riemannsche Geometrie (unter-)sucht solche Größen, die sich Riemannschen Mannigfaltigkeiten zuordnen lassen und unter Isometrien erhalten bleiben.
- Überprüfung von 5.3(*) mittels Karten (M', x) um p und (N', y) um $f(p)$: In solchen Karten gilt:
$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \overset{(*)}{=} \tilde{g}_{f(p)}\left(df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right), df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right)\right) \\ &= \tilde{g}_{f(p)}\left(\sum_k \frac{\partial(y_k \circ f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{f(p)},\right. \\ &\qquad\qquad \left.\sum_l \frac{\partial(y_l \circ f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_l}\right|_{f(p)}\right) \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial(y_k \circ f \circ x^{-1})}{\partial x_i}(x(p)) \cdot \tilde{g}_{kl}(f(p)) \cdot \frac{\partial(y_l \circ f \circ x^{-1})}{\partial x_j}(x(p)) \end{aligned}$$
Somit schreibt sich (*) wie folgt:
$$(g_{ij}(p))_{ij} = D(y \circ f \circ x^{-1})^T_{x(p)} \cdot (\tilde{g}_{kl}(f(p)))_{kl} \cdot D(y \circ f \circ x^{-1})_{x(p)} \qquad (**)$$
- Einbettungssatz von J.Nash: Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n ist isometrisch zu einer Untermannigfaltigkeit des $(\mathbb{R}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $N \approx n^2$. Bis auf Isometrie gibt es also keine weiteren Riemannschen Mannigfaltigkeiten außer Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume.

Definition/Lemma 5.4: Sei $f\colon M \to N$ eine Immersion, d.h. differenzierbar und $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ injektiv für alle $p \in M$. Dann wird für jede Metrik $\tilde{g}$ auf N eine Metrik g auf M definiert durch
$$g_p(v,w) = \tilde{g}_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)),\ p \in M,\ v,w \in T_pM$$

Wir schreiben $g = (f^*\tilde{g})$ und nennen $(f^*\tilde{g})$ die *Pullback-Metrik* (zurückgeführte Metrik) von g bezüglich der Abbildung f.

BEMERKUNG: Ist f sogar (lokaler) Diffeomorphismus, dann ist $g = f^*\tilde{g}$ die eindeutig bestimmte Metrik, so dass $f\colon (M, g) \to (N, \tilde{g})$ eine (lokale) Isometrie ist.

BEWEIS: Jedes wie oben definierte $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ ist bilinear (da $\tilde{g}_{f(p)}$ bilinear und df_p linear), symmetrisch und positiv definit:

$$\forall v \in T_pM \setminus \{0\}\colon g_p(v, v) = \tilde{g}_{f(p)}(df_p(v), df_p(v)) > 0$$

da df_p injektiv und somit $df_p(v) \neq 0$. Mittels Karten (M', x) um p und (N', y) um $f(p)$ mit $f(M') \subset N'$ weist man leicht nach, dass alle $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ differenzierbar sind (Rechnung analog zur Rechnung im obigen Beispiel). Also ist $g = (g_p)_{p \in M}$ eine Riemannsche Metrik auf M.

Einfacher als der Satz von Nash ist der folgende Satz:

SATZ 5.5: (Whitney's Einbettungssatz): Jede n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n+1}$.

KOROLLAR 5.6: Auf jeder differenzierbarer Mannigfaltigkeit gibt es eine Riemannsche Metrik.

BEWEIS: Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Nach 5.5 gibt es einen Diffeomorphismus

$$f\colon M \to \tilde{M} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$$

auf eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\tilde{M}$ des $\mathbb{R}^{2n+1}$. Die Einschränkung des Standard-Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^{2n+1}$ auf Tangentialvektoren definiert eine Riemannsche Metrik $\tilde{g}$ auf $\tilde{M}$. Da f ein Diffeomorphismus ist, ist f insbesondere eine Immersion und damit $f^*\tilde{g}$ eine Riemannsche Metrik auf M.

BEMERKUNG: Eine direktere Konstruktion klebt Metriken auf Kartenumgebungen (mittels einer „Zerlegung der Eins“) zusammen (auch der Beweis von 5.5 verwendet Zerlegungen der Eins).

WEITERES BEISPIEL:

- *Produktmannigfaltigkeiten:* Seien $(M, g), (N, h)$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $m = \dim M$ und $n = \dim N$. Nach Übung ist $M \times N$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Für $(p,q) \in M \times N$ definiert

$$\begin{array}{rcl} T_{(p,q)}(M \times N) & \to & T_pM \times T_qN \\ z & \mapsto & ((d\pi_1)_{(p,q)}(z), (d\pi_2)_{(p,q)}(z)) \end{array}$$

einen Vektorraum-Isomorphismus. Wir schreiben daher Vektoren in $T_{(p,q)}(M \times N)$ als Paare von Vektoren $(v,w) \in T_pM \times T_qN$ und definieren die *Produktmetrik* wie folgt:

$$(g \times h)_{(p,q)}((v,w),(\tilde{v},\tilde{w})) = g_p(v,\tilde{v}) + h_q(w,\tilde{w})$$

5.2 Quotientenmannigfaltigkeiten:

SATZ: Eine Gruppe $G \leq \mathrm{Isom}(M,g)$ operiere auf (M,g)

- *(fixpunkt-)frei*, d.h. für alle $\gamma \in G \setminus \{\mathrm{id}_M\}$ gilt $\{p \in M \mid \gamma.p = p\} = \emptyset$.
- *eigentlich diskontinuierlich*, d.h. für jedes Kompaktum $K \subset M$ ist die Teilmenge $\{\gamma \in G \mid \gamma.K \cap K \neq \emptyset\} \subset G$ endlich.

Es folgt: Um jedes $p \in M$ gibt es eine Karte (M^p, x^p), so dass für alle $\gamma \in G$ gilt:

$$M^p \cap \gamma(M^p) = \begin{cases} M^p, & \gamma = \mathrm{id}_M \\ \emptyset, & \gamma \neq \mathrm{id}_M \end{cases} \tag{*}$$

BEWEIS: Wähle die Umgebungen von p wie folgt:

- Sei (M', x) eine Kartenumgebung von p. Sei A eine kompakte Umgebung von p in M'. Dann ist $\gamma(A) \cap A \neq \emptyset$ nur für $\gamma = \mathrm{id}_M$ und $\gamma \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subset G \setminus \{\mathrm{id}_M\}$.
- Wähle eine kompakte Umgebung $B \subset A$, so dass $\gamma_i^{-1}(p) \notin B$ für alle $i = 1, \ldots, k$.
- Sei $M^p \subset B$ offen mit $\emptyset = M^p \cap \gamma_i(B) \supset M^p \cap \gamma_i(M^p)$

DEFINITION: In der Übung wurden *Bahnenraum* und *Projektionsabbildung* betrachtet:

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon M & \to & M/G = \{G.p \mid p \in M\} \\ p & \mapsto & G.p \end{array}$$

Damit ist (*) äquivalent zu: $\pi|_{M^p}$ ist injektiv.

Satz: In der Übung wurde gezeigt: M/G ist

- topologischer Hausdorffraum mit der *Quotiententopologie*

$$W \subset M/G \text{ offen } \iff \pi^{-1}(W) \text{ offen}$$

- differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Karten $(\pi(M^p), \tilde{x}^P)$ für $p \in M$, wobei $\tilde{x}^p = x^p \circ (\pi|_{M^p})^{-1} \colon \pi(M^p) \to x^p(M^p)$.
- π ist lokaler Diffeomorphismus: Jedes $\pi|_{M^p}$ ist ein Diffeomorphismus.

Satz 5.7: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Untergruppe $G \leq \mathrm{Isom}(M, g)$ operiere frei und diskontinuierlich auf M. Dann gibt es genau eine Metrik $\tilde{g}$ auf der Quotientenmannigfaltigkeit M/G, so dass die kanonische Projektion $\pi \colon M \to M/G$ eine lokale Isometrie wird.

Beweis:

- Es gibt höchstens eine solche Riemannsche Metrik $\tilde{g}$: Sei $[p] \in M/G$ mit einem Repräsentanten p, ferner $\tilde{v}, \tilde{w} \in T_{[p]}(M/G)$. Da π ein lokaler Diffeomorphismus ist, ist $d\pi_p \colon T_pM \to T_{\pi(p)}(M/G) = T_{[p]}(M/G)$ ein lokaler Vektorraum-Isomorphismus und es gibt eindeutig bestimmte Urbilder
$$v = (d\pi_p)^{-1}(\tilde{v}), \quad w = (d\pi_p)^{-1}(\tilde{w})$$
Sei $\tilde{g}$ eine Metrik auf M/G wie gefordert. Dann gilt nach Definition lokaler Isometrien:
$$g_p(v, w) = \tilde{g}_{[p]}(d\pi_p(v), d\pi_p(w)) = \tilde{g}_{[p]}(\tilde{v}, \tilde{w})$$
Also lässt sich $\tilde{g}$ eindeutig aus g ermitteln gemäß
$$\tilde{g}_{[p]}(\tilde{v}, \tilde{w}) = g_p((d\pi_p)^{-1}(\tilde{v}), (d\pi_p)^{-1}(\tilde{w})) \qquad (**)$$

- Existenz von $\tilde{g}$: Zunächst ist $\tilde{g}_{[p]}$ gemäß (**) wohldefiniert, d.h. unabhängig vom Repräsentanten $p \in [p]$: Für $q \in [p]$ existiert ein $\gamma \in G$ mit $\gamma.p = q$. Für $p' \in M$ gilt:[3]
$$\begin{aligned} & [p'] = G.p' = G.\gamma.p' = [\gamma(p')] \\ \Longrightarrow\ & \pi = \pi \circ \gamma \\ \Longrightarrow\ & d\pi_p = d\pi_{\gamma.p} \circ (d\gamma)_p = d\pi_q \circ (d\gamma)_p \end{aligned}$$

[3] Für kürzere Schreibweise fassen wir dabei γ als eine Isometrie $M \to M$ auf.

Wie behauptet folgt (da γ eine Isometrie ist):

$$
\begin{aligned}
g_p((d\pi_p)^{-1}(\tilde{v}),(d\pi_p)^{-1}(\tilde{w})) &= g_{\gamma.p}((d\gamma)_p\circ(d\pi_p)^{-1}(\tilde{v}),(d\gamma)_p\circ(d\pi_p)^{-1}(\tilde{w}))\\
&= g_q((d\pi_q)^{-1}(\tilde{v}),(d\pi_q)^{-1}(\tilde{w}))
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist jedes $\tilde{g}$ ein Skalarprodukt auf $T_{[p]}(M/G)$. Gemäß Lemma 5.2 bleibt es zu zeigen, dass für jede Karte (M',x) für M, so dass $\pi|_{M'}$ ein Diffeomorphismus ist, und für die assoziierte Karte $(\pi(M'),\tilde{x}=x\circ(\pi|_{M'})^{-1})$ für M/G die Koeffizienten der Metrik

$$\tilde{g}_{ij}=\tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\right):\pi(M')\to\mathbb{R}$$

differenzierbar sind. Wir berechnen für $p\in M'$:

$$
\begin{aligned}
d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) &= \sum_k\left[d\pi_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)\right](\tilde{x}_k)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_k}\right|_{[p]}\\
&= \sum_k\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\underbrace{(\tilde{x}_k\circ\pi)}_{=x_k}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_k}\right|_{[p]}\\
&= \left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i}\right|_p
\end{aligned}
$$

Und damit:

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{ij}([p]) &= \tilde{g}_{[p]}\left(\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i}\right|_{[p]},\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\right|_{[p]}\right)\\
&\overset{**}{=} g_p\left((d\pi_p)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i}\right|_{[p]}\right),(d\pi_p)^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j}\right|_{[p]}\right)\right)\\
&= g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{[p]},\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{[p]}\right)\\
&= g_{ij}(p)
\end{aligned}
$$

Somit ist $\tilde{g}_{ij}=g_{ij}(\pi|_{M'})^{-1}$ eine C^∞-Funktion. Daher ist $\tilde{g}$ Laut 5.2 eine Riemannsche Metrik. Wegen (**) ist π eine lokale Isometrie.

BEISPIELE:

- Ist $M=S^n$, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle|_{TM}$ und $G=\{\pm\mathrm{id}_{S^n}\}$, so heißt $(S^n/G,\tilde{g})$ *reell projektiver Raum.*

- Sei $m \geq 3$ und $1 \leq k < n$ mit $\mathrm{ggT}(k, m) = 1$. Dann operiert die Gruppe $\mathbb{Z}_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ auf

  $$S^3 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$$

  vermittels

  $$[j].(z_1, z_2) \quad = \quad \left(e^{\frac{2\pi j}{m} i} \cdot z_1, e^{\frac{2\pi k j}{m} i} \cdot z_2 \right)$$

  fixpunktfrei und isometrisch (und eigentlich diskontinuierlich). Man erhält den *Linsenraum* $L_{m,k} = (S^3/\mathbb{Z}_m, \tilde{g})$

5.3 Exkurs in die Topologie

Wir stellen einige Ergebnisse dar, ohne Beweis:

- Jede zusammenhängende Riemannsche (differenzierbare, topologische) Mannigfaltigkeit ist von der Form (d.h. isometrisch, diffeomorph bzw. homöomorph zu) $\tilde{M}/G$, wobei
  - $\tilde{M}$ eine Riemannsche (differenzierbare, topologische) Mannigfaltigkeit und *einfach zusammenhängend*[4] ist.
  - $G \leq \mathrm{Isom}(\tilde{M}, g)$ bzw. $G \leq \mathrm{Diffeo}(\tilde{M})$ oder $G \leq \mathrm{Homöo}(\tilde{M})$ auf $\tilde{M}$ frei und eigentlich diskontinuierlich operiert.
- Klassifikation differenzierbarer (topologischer) Mannigfaltigkeiten reduziert sich somit auf:
  - Klassifikation aller einfach zusammenhängenden.
  - Klassifikation freier, eigentlich diskontinuierlich, operierender Gruppen von Diffeomorphismen (Homöomorphismen).

  Für einzelne Dimensionen gilt:

  2: Es sind nur S^2 und $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend.

  3: Poincare-Vermutung: Ist M eine kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit und einfach zusammenhängend, so ist $M \simeq S^3$ (evtl. bewiesen von Perelman).

[4] D.h. jede geschlossene Kurve in $\tilde{M}$ lässt sich in $\tilde{M}$ stetig auf eine Punktkurve zusammenziehen. Beispiele: S^n für $n \geq 2$ oder $\mathbb{R}^n$. Gegenbeispiele: Torus T^2 oder S^1.

4: Klassifikation der einfach zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeiten ist äquivalent zur Untersuchung des Schnittverhaltens von Paaren 2-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten. Hierzu gibt es mehr Möglichkeiten in topologischen als in differenzierbaren Mannigfaltigkeiten: Es gibt kompakte 4-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Struktur besitzen. Für topologische Mannigfaltigkeiten wurde das Problem von M. Freedman und für differenzierbare von Donaldson untersucht.[5]

5: Sehr schwierig, bisher nur Teilresultate.

- Zwei Mannigfaltigkeiten M, N heißen *Homotop äquivalent* wenn stetige Abbildungen $f\colon M \to N$ und $g\colon M \to N$ existieren, deren Verknüpfung zur Identität *homotop* (stetig deformierbar) ist, man schreibt $f \circ g \simeq \mathrm{id}_N$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$. Für die Linsenräume sehen die Bedingungen wie folgt aus:

	$M = L_{m,k}, N = L_{m,k'}$	Beispiel
Isometrie Diffeomorphie Homöomorphie	$\left.\right\} k' \equiv \pm k^{\pm 1} \mod m$	$\left.\right\} L_{7,1} \not\approx L_{7,2}$
Homotopie	$kk' \equiv \pm l^2 \mod m$	$L_{7,1} \simeq L_{7,2}$

- Es gibt 27 exotische Sphären, der Dimension 7, d.h. homöomorph aber nicht diffeomorph zu S^7.

- Sei G eine kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei $H \lneq G$. Dann sind automatisch G und H Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Es existiert eine differenzierbare Struktur auf dem Nebenklassenraum $G/H = \{g.H \mid g \in G\}$.

  Sei nun $G = \mathrm{SU}(3)$ (8-dimensional). Für $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $k \neq -l$ definiere

$$H_{k,l} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2\pi i(kt)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(lt)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i(-k-l)t} \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0,1) \right\}$$

  Dann ist $N_{k,l} = G/H_{k,l}$ eine 7-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (*Aloff-Wallach-Raum*). Für die Diffeomorphie bzw. Homöomorphie von $N_{k,l}$ und $N_{k',l'}$ wurden 2 verschiedene zahlentheoretische

[5] Beides Fields-Medaillen

Bedingungen aufgestellt. Das kleinste Beispiel, wo die Bedingungen nicht äquivalent sind, ist

$$(k,l) = (-56788, 5227); \quad (k',l') = (-42652, 61213)$$

Für diese Zahlen ist $N_{k,l}$ homöomorph aber nicht diffeomorph zu $N_{k',l'}$

6 Riemannsche Abstandsfunktion

DEFINITION 6.1: Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

1. Eine Abbildung $c\colon [a,b] \to M$ heißt *differenzierbare Kurve*, falls c eine differenzierbare Fortsetzung $\hat{c}\colon I \to M$ auf ein offenes Intervall $I \supset [a,b]$ besitzt. Dann setzen wir $c'(t) = \hat{c}'(t) \in T_{c(t)}M$ für $t \in [a,b]$. Wir definieren die *Länge* von c als

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))}dt$$

2. Eine Abbildung $c\colon [a,b] \to M$ heißt *stückweise differenzierbar*, falls eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ existiert, so dass alle Teilkurven $c|_{[t_{i-1},t_i]}$ für $i = 1, \ldots, k$ differenzierbar sind. Für solche Kurven definieren wir

$$L(c) = \sum_{i=1}^{k} L(c|_{[t_{i-1},t_i]})$$

BEMERKUNGEN:

- $c'(t)$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von gewählter Fortsetzung: Betrachte für Fortsetzungen $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ und eine Karte (M', x) um $c(t)$ die nahe t definierte Abbildung $s \mapsto x \circ \hat{c}_1(s) - x \circ \hat{c}_2(s)$ und leite ab.

- In (2) ist $L(c)$ wohldefiniert, unabhängig von der Zerlegung, da

$$\int_{a_1}^{a_m} = \int_{a_1}^{a_2} + \ldots + \int_{a_{m-1}}^{a_m}.$$

  Wie gehabt ist $L(c)$ invariant unter Umparametrisierungen, d.h. es gilt $L(c) = L(c \circ \varphi)$ für jeden Diffeomorphismus $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$.

- Ist $c\colon [a,b] \to M'$ eine differenzierbare Kurve für eine Karte (M',x), so gilt mit $\tilde{c} = x \circ c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ für $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} c'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \{c'(t)([x_i])\} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left.\frac{d}{ds}\right|_t (x_i \circ c)(s) \right\} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i'(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \|c'(t)\| &= \sqrt{g_{c(t)} \left(\sum_i \tilde{c}_i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)}, \sum_j \tilde{c}_j(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{c(t)} \right)} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{c}_i'(t) \cdot \tilde{c}_j'(t) \cdot g_{ij}(c(t))} \end{aligned}$$

Also gilt

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{c}_i'(t) \cdot \tilde{c}_j'(t) \cdot g_{ij}(c(t))} dt$$

- Ist $f\colon (M,g) \to (N,h)$ eine Isometrie und $c\colon [a,b] \to M$ differenzierbar, so auch $f \circ c$ mit

$$\begin{aligned} \|(f \circ c)'(t)\| &= \left\| df_{c(t)}(c'(t)) \right\| \\ &= \left\{ h_{f(c(t))} \left[df_{c(t)}(c'(t)), df_{c(t)}(c'(t)) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) \right]^{\frac{1}{2}} = \|c'(t)\| \end{aligned}$$

Also gilt $L(f \circ c) = L(c)$, d.h. Isometrien erhalten Kurvenlängen.

Es gilt auch die Umkehrung: Sei $f\colon (M,g) \to (N,h)$ ein Diffeomorphismus und erhalte alle Kurvenlängen. Für jede Kurve $c\colon [0,\varepsilon) \to M$ gilt dann:

$$\int_0^t \|c'(\tau)\|\, d\tau = \int_0^t \|(f \circ c)'(\tau)\|\, d\tau \quad \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad \|c'(t)\| = \left\| df_{c(t)}(c'(t)) \right\|$$

Somit erhält jedes df_p die Längen von Vektoren, daher auch die Skalarprodukte wegen

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

DEFINITION 6.2: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt die Funktion

$$\begin{aligned} d\colon M \times M &\to [0,\infty) \cup \{\infty\} \\ d(p,q) &= \inf\{L(c) \mid c\colon [a,b] \to M \text{ stückweise differenzierbar} \\ &\qquad\qquad \text{mit } c(a) = p,\ c(b) = q\} \end{aligned}$$

mit der Konvention $\inf(\emptyset) = \infty$ eine *Riemannsche Abstandsfunktion* auf (M, g).

BEMERKUNGEN:

- Ist M zusammenhängend, so gibt es zwischen je zwei p, q eine stückweise differenzierbare Verbindungskurve, also gilt $d(p,q) < \infty$.

- Ist $\varphi \in \operatorname{Isom}(M, g)$, so erhält φ Kurvenlängen und somit auch d.

- Ist c eine stückweise differenzierbare Kurve zwischen p und q, so ist c^- mit $c^-(t) = c(q-t)$ stückweise differenzierbar zwischen q und p. Daraus folgt: $d(p,q) = d(q,p)$

- Es gilt $d(p,q) \geq 0$ und $d(p,p) = 0$ (Punktkurve)

- Sind $d(p,q), d(q,r) < \infty$, so gibt es stückweise differenzierbare Kurven

  $$\begin{aligned} c&\colon [0,1] \to M \text{ von } p \text{ nach } q \text{ mit } L(c) < d(p,q) + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ \tilde{c}&\colon [0,1] \to M \text{ von } q \text{ nach } r \text{ mit } L(\tilde{c}) < d(q,r) + \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

  Somit ist die Kurve

  $$c \cup \tilde{c}\colon [0,2] \to M, \quad t \mapsto \begin{cases} c(t), & t \in [0,1] \\ \tilde{c}(t-1), & t \in (1,2] \end{cases}$$

  stückweise differenzierbar von p nach r. Es gilt

  $$d(p,r) \leq L(c \cup \tilde{c}) = L(c) + L(\tilde{c}) < d(p,q) + d(q,r) + \varepsilon$$

  Somit erfüllt d die Dreiecksungleichung (auch bei auftretenden Summanden ∞).

Somit ist d eine Metrik (im Sinne metrischer Räume), falls zusätzlich gilt:

- $\forall p, q \in M\colon p \neq q \Longrightarrow d(p,q) > 0$
- $\forall p, q \in M\colon d(p,q) < \infty$

Die erste Bedingung gilt immer, die zweite genau dann, wenn M zusammenhängend ist (siehe unten). Die Bemerkungen zeigen außerdem, dass folgendes eine Äquivalenzrelation auf M ist:

$p \sim q \Longleftrightarrow$ Es gibt eine stückweise differenzierbare Kurve von p nach q

SATZ 6.3: Die Äquivalenzklassen sind offen. Insbesondere gibt es nur eine Äquivalenzklasse, falls M zusammenhängend ist. In diesem Fall gilt $d(p,q) < \infty$ für alle p, q.

SATZ 6.4: Sei (M,g) zusammenhängend. Dann gilt für alle $p \neq q \in M$, dass $d(p,q) > 0$ ist. Insbesondere ist (M,d) ein metrischer Raum. Die Topologie $\mathcal{T}$ von M stimmt mit der von d erzeugten Topologie $\mathcal{T}_d$ überein.

BEWEIS:

1. Sei $p \in M$ und $x\colon M' \to U \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte um p, sei $u_0 = x(p)$. Wähle ein $R > 0$ mit $B_R^{\mathbb{R}^n}(u_0) \subset U$ und setze $K = x^{-1}(\overline{B_R^{\mathbb{R}^n}(u_0)})$, eine kompakte Umgebung von p. Die stetige Funktion

$$\begin{aligned} K \times \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i v_i^2 = 1 \right\} &\to \mathbb{R} \\ (q,v) &\mapsto v^T \cdot (g_{ij}(q))_{ij} \cdot v = \sum_{ij} v_i v_j g_{ij}(q) \end{aligned}$$

   nimmt nur positive Werte an, daher auf ihrem kompakten Definitionsbereich ihr Minimum $m > 0$ und ihr Maximum $\hat{m} \geq m > 0$. Durch Einsetzen $v = \frac{w}{\sqrt{\sum_k w_k^2}}$ für $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ folgt für alle $q \in K, w \in \mathbb{R}^n$:

$$\hat{m} \cdot \sum_k w_k^2 \geq \sum_{ij} w_i w_j \cdot g_{ij}(q) \geq m \sum_k w_k^2$$

2. Sei $q \in M \setminus \{p\}$ und $c\colon [a,b] \to M$ eine stückweise differenzierbare Kurve von p nach q. Wir betrachten zwei Fälle:

Fall 1: Bild$(c) \subset K \subset M'$. Mit $\tilde{c} = x \circ c$ gilt:

$$\begin{aligned}
L(c) &= \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} \tilde{c}_i'(t) \cdot \tilde{c}_j'(t) \cdot g_{ij}(c(t))} dt \\
&\overset{(*)}{\geq} \int_a^b \sqrt{m \sum_i (\tilde{c}_i(t))^2} dt = \sqrt{m} \int_a^b \|\tilde{c}'(t)\| \, dt \\
&\geq \sqrt{m} \int_{\hat{a}}^b \|\tilde{c}'(t)\| \, dt \qquad \text{für } \hat{a} = \max\{ t \mid \tilde{c}(t) = u_0 \} \\
\text{Cauchy-Schwarz:} &\geq \sqrt{m} \int_{\hat{a}}^b \frac{\langle c'(t), \tilde{c}(t) - u_0 \rangle}{\|\tilde{c}(t) - u_0\|} dt \\
&= \sqrt{m} \int_{\hat{a}}^b \frac{d}{dt} \|\tilde{c}(t) - u_0\| \, dt \\
&\geq \sqrt{m} \, \|\tilde{c}(t) - u_0\| \Big|_{\hat{a}}^b = \sqrt{m} \, \|x(q) - u_0\| \Big|_{\hat{a}}^b
\end{aligned}$$

Fall 2: Es existiere $\bar{t} \in (a, b]$ mit $c(\bar{t}) \notin K$. Setze

$$\hat{b} = \min \left\{ t \in (a, b] \mid c(t) \in M \setminus x^{-1}(B_R(u_0)) \right\}$$

Das Minimum existiert, da die Menge abgeschlossen ist. Es folgt einerseits $c(\hat{b}) \notin x^{-1}(B_R(u_0))$, anderseits ist $c([a, \hat{b})) \subset x^{-1}(B_R(u_0))$ und da c stetig ist, folgt:

$$\begin{aligned}
& c(\hat{b}) \in \overline{x^{-1}(B_R(u_0))} = x^{-1}(\overline{B_R(u_0)}) \\
\Longrightarrow \quad & x(c(\hat{b})) \in \partial \overline{B_R(u_0)} \\
\Longrightarrow \quad & \|x(c(\hat{b})) - u_0\| = \|\tilde{c}(\hat{b}) - u_0\| = R
\end{aligned}$$

Da Bild$(c|_{[a,b]}) \subset K$, folgt nach Fall 1:

$$L(c) \geq L(c|_{[a,b]}) \overset{(1)}{\geq} \sqrt{m} R$$

3. Aus Fall 1 und 2 folgt für alle $q \in M$ mit $q \neq p$:

$$d(p, q) \geq \begin{cases} \sqrt{m} \, \|x(q) - u_0\|, & q \in K \\ \sqrt{m} R, & q \notin K \end{cases}$$

und damit $d(p, q) > 0$.

4. Jede Umgebung W von p bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ enthält eine Teilmenge $x^{-1}(B_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(u_0))$ für $0 < \varepsilon < R$, weil x bezüglich $\mathcal{T}$ ein Homöomorphismus ist. Diese wiederum enthält nach (3) den d-Ball $B^d_{\sqrt{m}\varepsilon}(p)$. Also ist W auch Umgebung von p bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_d$.

5. Für $q \in K$ betrachte die Kurve

$$\begin{array}{rcl} \bar{c}\colon [0,1] & \to & K \subset M, \\ t & \mapsto & x^{-1}((1-t)u_0 + tx(q)). \end{array}$$

   Hieraus ergibt sich analog zu (2):

$$d(p,q) \le L(\bar{c}) \overset{(*)}{\le} \sqrt{\hat{m}}\, \|x(q) - u_0\| \qquad (**)$$

   Ist $\hat{W}$ eine $\mathcal{T}_d$-Umgebung von p, so enthält $\tilde{W}$ einen d-Ball $B^d_{\varepsilon'}(p)$ mit $0 < \varepsilon' < \sqrt{m}R$, nach (3) enthalten in K. Wegen (**) enthält dieser d-Ball die bezüglich $\mathcal{T}$ offene Menge

$$x^{-1}\left(B^{\mathbb{R}^n}_{\varepsilon'/\sqrt{\hat{m}}}(u_0)\right)$$

   Also ist $\tilde{W}$ auch Umgebung von p bezüglich $\mathcal{T}$.

6. Nach (4) und (5) haben $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_d$ dieselben offenen Mengen. $\square$

Bemerkung: Zur Definition $d(p,q) = \inf\{\ldots\}$: Später wird gezeigt, dass kürzeste Verbindungskurven, d.h. mit $L(c) = d(c(a), c(b))$ immer *lokal* existieren und sogar *global*, falls (M,d) ein *vollständiger* metrischer Raum ist (Satz von Hopf-Rinow), z.B. falls M kompakt oder (M,g) *homogen*[6] ist.

7 Tensoren

Jede Riemannsche Metrig g auf M definiert eine Abbildung, die $\mathbb{R}$-bilinear und in jedem Argument C^∞-linear ist, d.h. für beliebige $X, Y \in \mathcal{V}M$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt:

$$f \cdot g(X,Y) = g(f \cdot X, Y) = g(X, f \cdot Y)$$

Definition 7.1: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $s \in \mathbb{N}$. Ein $(0,s)$-*Tensor* bzw. $(1,s)$-*Tensor* ist eine $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung

$$T\colon \underbrace{\mathcal{V}M \times \ldots \times \mathcal{V}M}_{s \text{ Stück}} \to C^\infty(M)$$

$$\text{bzw.} \quad T\colon \underbrace{\mathcal{V}M \times \ldots \times \mathcal{V}M}_{s \text{ Stück}} \to \mathcal{V}M,$$

[6] D.h. $\mathrm{Isom}(M,g)$ operiert transitiv auf M.

die in jedem ihrer s Argumente C^∞-linear ist, d.h. für $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{V}M$, $f \in C^\infty(M)$ gilt:

$$T(X_1, \dots, f \cdot X_i, \dots, X_s) = f \cdot (X_1, \dots, X_i, \dots, X_s), \quad i = 1, \dots, s$$

Beispiele: Jede Riemannsche Metrik g ist nach obigem ein $(0,2)$-Tensor, id_M ist ein $(1,1)$-Tensor. Weitere Beispiele kommen später.

Beachte, dass $g(X,Y)(p)$ nur von $X(p), Y(p) \in T_pM$ abhängt und nicht von Werten von X, Y in anderen Punkten von M. Diese Beobachtung ist ganz allgemein für Tensoren gültig.

Proposition 7.2: Sei T ein $(0,s)$- oder $(1,s)$-Tensor. Sind $X_1, \dots, X_s \in \mathcal{V}M$ und $Y_1, \dots, Y_s \in VM$ mit $X_i(p_0) = Y_i(p_0)$ für alle i mit einem festen p_0, so folgt:

$$T(X_1, \dots, X_s)(p_0) = T(Y_1, \dots, Y_s)(p_0),$$

d.h. $T(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s)(p)$ hängt nur von den $\tilde{X}_i(p)$ ab.

Beweis: Wähle eine Karte (M', x) um p_0, so dass sich die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{V}M'$ zu C^∞-Vektorfeldern $Z_i \in \mathcal{V}M$ auf ganz M fortsetzen lassen. Wähle außerdem eine offene Umgebung $W \subset \bar{W} \subset M'$ um p und eine C^∞-Funktion $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(p_0) = 1$ und $\varphi|_{M \setminus W} \equiv 0$. Setze $\hat{X}_i = \varphi \cdot X_i$ für alle i. Dann gibt es $\psi_{ij} \in C^\infty(M)$ für $i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, s$ mit

$$\hat{X}_j = \sum_i \psi_{ij} Z_j, \quad j = 1, \dots, s,$$

wobei $\psi|_{M \setminus W} \equiv 0$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, X_s)(p_0) &= \varphi(p_0)^s T(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s)(p_0) = T(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_s)(p_0) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_s = 1}^{n} \psi_{i_1 1}(p_0) \dots \psi_{i_n n} T(Z_{i_1}, \dots, Z_{i_s}) \end{aligned} \tag{*}$$

Da

$$X_j(p_0) = \hat{X}_j(p_0) = \sum_i \psi_{ij}(p_0) Z_i(p_0) = \sum_i \psi_{ij}(p_0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{p_0},$$

hängen die $\psi_{ij}(p_0)$ nur vom Wert $X_j(p_0) \in T_pM$ ab. Nach (*) gilt gleiches für $T(Y_1, \dots, Y_s)(p_0)$ mit denselben Koeffizienten $\psi_{ij}(p_0)$ und daher

$$T(X_1, \dots, X_s)(p_0) = T(Y_1, \dots, Y_s)(p_0).$$

BEMERKUNG: Wie für Riemannsche Metriken können wir auch jeden (i, s)-Tensor T betrachten als Familie multilinearer Abbildungen $(T_p)_{p \in M}$ mit

$$\begin{aligned} T_p \colon T_pM^s &\rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}, & i = 0 \\ T_pM, & i = 1 \end{cases} \\ T_p(v_1, \ldots, v_n) &:= T(X_1, \ldots, X_s)(p) \end{aligned}$$

für beliebige $X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{V}M$ mit $X_i(p) = v_i$, so dass die Familie $(T_p)_{p \in M}$ differenzierbar von p abhängt im folgenden Sinne: Für $Y_1, \ldots, Y_s \in \mathcal{V}M$ ist die Abbildung $p \mapsto T_p(Y_1(p), \ldots, Y_s(p)),\ p \in M$ differenzierbar (Funktion, falls $i = 0$ bzw. Vektorfeld, falls $i = 1$).

Diese Definition ist äquivalent zur folgenden: Um jedes $p \in M$ existiert eine Karte (M', x), so dass alle

$$T_{i_1 \ldots i_s}(p) = T_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right|_p, \ldots, \left. \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \right|_p \right)$$

für $p \in M',\ i_1, \ldots, i_s \in n\rfloor$ differenzierbar sind.

Andere äquivalente Definition: Für jede Karte $(\tilde{M}, \tilde{x})$ sind alle Funktionen $T_{i_1 \ldots i_s}$ differenzierbar.

8 Kovariante Ableitung von Vektorfeldern

Schon kennengelernt: Richtungsableitungen $X(h)$ von Funktionen $h \in C^\infty(M)$ längs Vektorfeldern $X \in \mathcal{V}M$ (sinnvoll auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten). ZIEL: Konstruktion der Ableitung eines Vektorfeldes $Y \in \mathcal{V}M$ längs eines Vektorfeldes X (erfordert eine Riemannsche Metrik).

Zur Motivation dieser Ableitung /ihrer Eigenschaften betrachten wir Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit der 1. Fundamentalform als Riemannsche Metrik auf M.

Für jedes $p \in M$ zerlegen wir bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ den Tangentialraum in orthogonale direkte Summe:

$$\mathbb{R}^{n+k} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,\ x = x^{T_p} + x^{\perp_p}$$

LEMMA 8.1: Ist $Z \colon M \to \mathbb{R}^{n+k}$ differenzierbar, so definiert $(Z^T)(p) = (Z(p))^{T_p},\ p \in M$ ein differenzierbares Vektorfeld auf M

BEWEIS: In der Übung.

DEFINITION: Kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $Y \in \mathcal{V}M$ längs $X \in \mathcal{V}M$:

$$(\nabla_X Y)(p) = [dY_p(X(p))]^{T_p} \in T_pM$$

Da $p \mapsto dY_p(X(p)) \in \mathbb{R}^{n+k}$ differenzierbar ist, ist nach 8.1 auch $p \mapsto (\nabla_x Y)(p)$ differenzierbar, d.h. wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla\colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\to \mathcal{V}M \\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

1. ∇ ist $\mathbb{R}$-bilinear.

2. ∇ ist $C^\infty(M)$-linear (*tensoriell*) im 1. Argument, d.h. es gilt:

   $$\nabla_{f\cdot X+\tilde{f}\cdot\tilde{X}} Z = f \cdot \nabla_X Y + \tilde{f} \cdot \nabla_{\tilde{X}} Y$$

   für $X, \tilde{X}, Y \in \mathcal{V}M$ und $f, \tilde{f} \in C^{\infty M}$

3. ∇ ist eine Derivation im 2. Argument, d.h. es gilt:

   $$\nabla_X(h \cdot Y) = X(h) \cdot Y + h \cdot \nabla_x(Y)$$

   für $X, Y \in \mathcal{V}M$ und $h \in C^{\infty M}$.

BEWEIS: (von 3): Es gilt

$$\begin{aligned} (\nabla_X(g\cdot Y))(p) &= [d(g\cdot Y)_p(X(p))]^{T_p} \\ \mathit{Kettenregel:} \quad &= \left[\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 (g\cdot Y)(c(t))\right]^{T_p} \quad (\text{ für }: I \to M,\ c(0) = p,\ c'(0) = X(p)) \\ &= \left[\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 g(c(t)) \cdot Y(c(t))\right]^{T_p} \\ &= \left[\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 g(c(t))\right] \cdot Y(p) + g(p) \cdot \left[\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 Y(c(t))\right]^{T_p} \\ &= X(g)(p) \cdot Y(p) + g(p) \cdot (\nabla_X Y)(p) \end{aligned}$$

BEMERKUNG: Abbildungen ∇ mit Eigenschaften (1)-(3) heißen *kovariante Ableitungen* auf M. Hier (d.h. für Untermannigfaltigkeiten und das gegebene ∇) gilt außerdem:

4. Für $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_0 |_{T_pM \times T_pM}$ gilt:

$$\begin{aligned}
X(g(Y,Z))(p) &= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 [\langle Y, Z\rangle \cdot c(t)] \,(\text{ mit } c\colon I \to M, c(0) = p, c'(0) = X(p)) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_0 \langle Y(c(t)), Z(c(t))\rangle \\
&= \langle dY_p(X(p)), Z(p)\rangle + \langle Y(p), dZ_p(X(p))\rangle_0 \\
&= \left\langle [dY_p(X(p))]^{T_p}, Z(p)\right\rangle + \left\langle Y(p), [dZ_p(X(p))]^{T_p}\right\rangle_0 \\
&= \langle (\nabla_X Y)(p), Z(p)\rangle + \langle Y(p), (\nabla_X Z)(p)\rangle_0 \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)
\end{aligned}$$

Kovariante Ableitungen mit (4) nennt man *metrisch* oder *Riemannsch*

5. Weitere Eigenschaft: Für alle $X, Y \in \mathcal{V}M$ gilt:

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

BEWEIS: : In der Übung. BEWEISIDEE: Zeige:

- Die Abbildung

$$\begin{aligned}
T\colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\to \mathcal{V}M, \\
T(X,Y) &= [X,Y] - \nabla_X Y - \nabla_Y X
\end{aligned}$$

  ist ein $(1,2)$-Tensor (*Torsionstensor*).

- $T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \equiv 0$. Somit folgt: $T \equiv 0$.

Eigenschaft (5) heißt *Torsionsfreiheit von* ∇.

ZIEL: Nachweis, dass es auf jedem (M, g) genau ein solches ∇ (mit (1)-(5)) gibt, d.h. genau eine metrische, torsionsfreie kovariante Ableitung.

DEFINITION 8.2: Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

- Eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung g

$$\begin{aligned}
\nabla\colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\to \mathcal{V}M, \\
(X,Y) &\mapsto \nabla_X Y
\end{aligned}$$

  heißt *kovariante Ableitung* oder *Zusammenhang* auf M, falls gilt:

  – ∇ ist $\mathbb{R}$-bilinear

– ∇ ist $C^\infty(M)$-linear in X
– ∇ ist Derivation in Y

- ∇ heißt *torsionsfrei*, wenn für alle $X, Y \in \mathcal{V}M$

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

- Ist g eine Riemannsche Metrik auf M, so heißt ∇ *metrisch* oder *Riemannsch* bezüglich g, falls gilt: für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$ ist

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

BEMERKUNGEN:

1. Der Wert $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur ab von $X(p) \in T_pM$ und $Y|_{M'}$ für beliebig kleine offene Umgebung M' von p. BEWEIS:

   - Für festes Y ist $X \mapsto \nabla_X Y$ nach (1) ein $(1,1)$-Tensor. Nach Proposition 7.2 folgt: $X(p) = \tilde{X}(p) \Rightarrow (\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{\tilde{X}} Y)(p)$ wie behauptet. Wir schreiben daher für $v \in T_pM$ auch kurz $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)(p)$ für beliebiges $X \in \mathcal{V}M$ mit $X(p) = v$.
   - Stimmen $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{V}M$ auf M' überein, so gilt für geeignete Funktionen $\varphi \in C^\infty(M)$ mit $\varphi = 1$ nahe p und $\varphi|_{M \setminus M'} \equiv 0$: ist $\varphi Y = \varphi \tilde{Y}$, so gilt

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y)(p) &= \varphi(p)(\nabla_X Y)(p) + X(\varphi)(p)Y(p) \\
&= (\nabla_X(\varphi \cdot Y))(p) = (\nabla_X(\varphi \cdot \tilde{Y}))(p) \\
&= \ldots = (\nabla_X \tilde{Y})(p)
\end{aligned}$$

2. Ist ∇ ein Zusammenhang auf M und (M', x) eine Karte, so ist nach (1) jedes lokale Vektorfeld $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ wohldefiniert. Wir schreiben dieses wie gewohnt als Linearkombination der Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial x_k}$. Die Koeffizienten $\Gamma_{ij}^k \colon M' \to \mathbb{R}$ heißen *Christoffel-Symbole* von ∇ bezüglich der Karte (M', x), d.h. es gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

   Die Γ_{ij}^k liefern $(\nabla_X Y)|_{M'}$, denn für $X|_{M'} = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y|_{M'} =$

$\sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{ij} \nabla_{f_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \left(g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{ij} f_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{ij} f_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + g_j \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)
\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist nun aus den Γ_{ij}^k berechenbar.

Der Zusammenhang ∇ ist genau dann torsionsfrei, wenn in jeder Karte gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right]}_{\equiv 0} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= -\sum_k \left\{ \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{für alle } i, j \\
&= \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad \text{für alle } i, j, k
\end{aligned}$$

SATZ 8.3: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen Zusammenhang $\nabla \colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$ auf M, der zusätzlich metrisch bezüglich g und torsionsfrei ist, der *Levi-Civita-Zusammenhang*. Die Christoffel Symbole Γ_{ij}^k von bezüglich einer Karte (M', x) berechnen sich aus den Koeffizienten $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ nach der Formel

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} (g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}) \\
g_{il,j}(q) &= \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_q (g_{il}) = \frac{\partial (g_{il} \circ x^{-1})}{\partial u_j} (x(q))
\end{aligned}$$

Dabei ist $(g^{kl}(q))_{kl} := (g_{ij}(q))_{ij}^{-1}$ für $q \in M'$.

BEWEIS: Zuerst die Eindeutigkeit: Seien $X, Y, Z \in \mathcal{V}M$, wir schreiben $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anstelle g. Sei ∇ ein torsionsfreier metrischer Zusammenhang auf (M, g).

Dann folgt:

$$\begin{aligned} X(\langle Y,Z\rangle) &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y(\langle X,Z\rangle) &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle \\ -Z(\langle X,Y\rangle) &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

Alles addiert ergibt:

$$\begin{aligned} X(\langle Y,Z\rangle) + Y(\langle X,Z\rangle) - Z(\langle X,Y\rangle) &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle \\ &\quad + \langle Y, [X,Z]\rangle - \langle Z, [X,Y]\rangle \end{aligned}$$

Es folgt die *Koszul-Formel* für den Levi-Civita-Zusammenhang:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X(\langle Y,Z\rangle) + Y(\langle X,Z\rangle) - Z(\langle X,Y\rangle) \\ &\quad - \langle X, [Y,Z]\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle Z, [X,Y]\rangle \end{aligned}$$

die ∇ eindeutig festlegt: Ist $X, Y \in \mathcal{V}M$ und $p \in M$, so wähle $Z_i \in \mathcal{V}M$, so dass $(Z_i(p))_{i=1}^n$ eine Orthonormalbasis von $(T_pM, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bilden. Es folgt:

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_i \langle \nabla_X Y, Z_i\rangle \cdot Z_i(p)$$

Dabei sind $\langle \nabla_X Y, Z_i\rangle$ eindeutig aus (*) berechenbar.
Mit $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x_l}$ folgt aus der Koszul-Formel:

$$\begin{aligned} a_{ijl} &:= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle + \ldots - \ldots\right) \\ &= g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l} \\ &\overset{*}{=} 2\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right\rangle \\ &= 2\left\langle \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right\rangle \\ &= 2\sum_k g_{lk}\Gamma_{ij}^k = \left[2(g_{pq})_{pq}\cdot\begin{pmatrix}\Gamma_{ij}^1\\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^n\end{pmatrix}\right]_{l\text{-te}Zeile} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{ij1} \\ \vdots \\ a_{ijn}\end{pmatrix} = 2(g_{pq})_{pq}\begin{pmatrix}\Gamma_{ij}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^k\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}\Gamma_{ij}^1 \\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^k\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(g^{\tilde p\tilde q})_{\tilde p\tilde q}\begin{pmatrix} a_{ij1} \\ \vdots \\ a_{ijn}\end{pmatrix}$$

Einsetzen der $a_{ijl} = g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l}$ liefert die obige Formel für die Γ_{ij}^k.

Beweis der Existenz: In der Übung. IDEE: Definiere ∇ mittels (*), weise dann die Eigenschaften einer kovarianten Ableitung und Torsionsfreiheit nach sowie, dass ∇ metrisch bezüglich g ist: Berechne die rechte Seite von (*) als $S(X, Y, Z)$. Zeige, dass S tensoriell in Z ist. Für festes $p \in M$ ist daher $S(X, Y, Z)(p)$ nur von $Z(p)$ abhängig, liefert daher eine Linearform

$$T_pM \to \mathbb{R}, \quad Z(p) \mapsto S(X, Y, Z)(p)$$

Es gibt daher genau einen Tangentialvektor $W(p) = W_{X,Y}(p)$ mit der Eigenschaft

$$S(X, Y, Z)(p) = \langle W(p), Z(p)\rangle \text{ für alle } Z.$$

(Weil $T_pM \to \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R}),\ v \mapsto \langle v, \cdot\rangle$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist). Zeige die Differenzierbarkeit des Vektorfeldes $p \mapsto W(p)$; schreibe $\nabla_X Y = W_{X,Y}$ und weise nach, dass das das so definierte ∇ Zusammenhang, torsionsfrei und metrisch ist. □

BEMERKUNG: Auf jedem M gibt es sehr viele torsionsfreie Zusammenhänge. Sei z.B. g eine Riemannsche Metrik auf M, ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang von g und $S\colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \to \mathcal{V}M$ ein beliebiger symmetrischer $(1, 2)$-Tensor. Dann ist

$$\begin{aligned} \nabla + S\colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\to \mathcal{V}M \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y + S(X, Y) \end{aligned}$$

ein torsionsfreier Zusammenhang auf M. Umgekehrt gilt für jeden weiteren torsionsfreien Zusammenhang $\tilde{\nabla}$: Die Abbildung $\tilde{S} := \tilde{\nabla} - \nabla$ ist ein symmetrischer $(1, 2)$-Tensor.

LEMMA 8.4: Sei $X, Y \in \mathcal{V}M$, $p \in M$ und eine differenzierbare Kurve $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $c(0) = p$, $c'(0) = X(p)$. Dann gilt für jeden Zusammenhang ∇ auf M: Der Vektor $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur von $Y \circ c$ ab, d.h. für $\tilde{Y} \in \mathcal{V}M$ mit $\tilde{Y} \circ c = Y \circ c$ gilt $(\nabla_X \tilde{Y})(p) = (\nabla_X Y)(p)$.

BEWEIS: Sei (M', x) eine Karte nahe p und

$$Y|_{M'} = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \tilde{Y}|_{M'} = \tilde{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit C^∞-Funktionen $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i \colon M' \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y)(p) &= \nabla_{X(p)} \left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_i \left\{ \underbrace{X(p)([\alpha_i])}_{= \frac{d}{dt}\big|_0 (\alpha_i \circ c)(t) = \frac{d}{dt}\big|_0 (\tilde{\alpha}_i \circ c)(t)} \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p - \alpha_i(p) \nabla_{X(p)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
&= \ldots = (\nabla_X \tilde{Y})(p)
\end{aligned}$$

□

Dies ist der Ansatzpunkt für die Einführung der kovarianten Ableitung für Vektorfelder längs Kurven.

DEFINITION 8.5: Sei $c \colon I \to M$ eine differenzierbare Kurve. Eine Abbildung $X \colon I \to TM$ heißt ein *Vektorfeld längs S*, falls gilt:

$$\forall t \in I \colon \; X(t) \in T_{c(t)} M$$

Das Vektorfeld längs c heißt *differenzierbar*, falls in jeder Karte dei Koeffizientenfunktionen α_i der Darstellung

$$X(t) = \sum_i \alpha_i(t) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{c(t)}, \; t \in c^{-1}(M)$$

differenzierbar sind für $i = 1, \dots, n$. Es bezeichne $\mathcal{V}_c$ den Vektorraum aller differenzierbaren Vektorfelder längs c.

BEISPIEL: Sei $c \colon I \to M$ eine Punktkurve, $c(t) \equiv p$. Dann ist jede Differenzierbare Kurve $X \colon I \to T_p M$ ein differenzierbares Vektorfeld längs c.

SATZ 8.6: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-kovarianter Ableitung ∇ und sei $c \colon I \to M$ eine differenzierbare Kurve in M. Dann gibt es genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\frac{D}{dt} \colon \mathcal{V}_c \to \mathcal{V}_c, \; X \mapsto \frac{DX}{dt}$$

(*Levi-Civita Zusammenhang längs c*), so dass gilt:

1. $\frac{D}{dt}(f \cdot X) = f' \cdot X + f \cdot \frac{DX}{dt}$ für alle $X \in \mathcal{V}_c$, $f \in C^\infty(I)$.
2. $\frac{D}{\partial t}(Y \circ c)|_{t_0} = \nabla_{c'(t_0)} Y$ für alle $Y \in \mathcal{V}M$.

Beweis: Zuerst die Eindeutigkeit: Ist (M', x) eine Karte, $\tilde{I} = c^{-1}(M')$ offen in I, so gilt für jede lineare Abbildung $\frac{D}{\partial t}$ mit (1) und (2) für jedes $t \in \tilde{I}$:

$$\left\{ X(t) = \sum_i \alpha_i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} \;\middle|\; (*) \frac{DX}{dt}(t) = \sum_i \left[\alpha_i'(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)} + \alpha_i(t) \nabla_{c'(t_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \right\}$$

Diese Form legt $\frac{DX}{dt}|_{\tilde{I}}$ eindeutig fest. Damit ist (bei Betrachten mehrerer Karten) für jedes $X \in \mathcal{V}_c$ die Ableitung $\frac{DX}{dt} \in \mathcal{V}_c$ eindeutig festgelegt.

Existenz: (*) definiert eine lineare Abbildung

$$\frac{D}{\partial t}^{\tilde{I}} : \{X|_{\tilde{i}} \mid X \in \mathcal{V}_c\} =: \mathcal{V}_c^{\tilde{I}} \to \mathcal{V}_c^{\tilde{I}}$$

(wobei $\tilde{I} = c^{-1}(M')$), die (1) und (2) erfüllt (direktes Nachrechnen). Ist $(\hat{M}, \hat{x})$ eine weitere Karte und $\hat{I} = c^{-1}(\hat{M})$, so erhält man analog $\frac{D}{\partial t}^{\hat{I}} : \mathcal{V}_c^{\tilde{I}} \to \mathcal{V}_c^{\tilde{I}}$. Auf $\mathcal{V}_c^{\hat{I} \cap \tilde{I}}$ wirken $\frac{D}{\partial t}^{\tilde{I}}$ und $\frac{D}{\partial t}^{\hat{I}}$ linear und erfüllen (1) und (2) und stimmen daher (nach Beweisschritt (1)) überein. Daher lassen sich alle $\frac{D}{\partial t}^{\tilde{I}}$ zu dem gesuchten $\frac{D}{\partial t} : \mathcal{V}_c \to \mathcal{V}_c$ zusammensetzen.

Bemerkung: Für $c \colon I \to M \subset (\mathbb{R}^{n+k}, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ und $X \in \mathcal{V}_c$ ist

$$\frac{DX}{dt}(t_0) = \{\dot{X}(t_0)\}^{\top_{c(t_0)}}$$

Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{V}_c$ gilt lokal (d.h. auf $c^{-1}(M')$ wie oben) mit den Darstellungen

$$X(t) = \sum_i \alpha_i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t)}, \quad Y(T) = \sum_j \beta_j(t) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{c(t)}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \langle X(t), Y(t)\rangle_{c(t)} &= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle (c(t)) \\
&= \sum_{i,j} (\alpha_i\beta_j)'(t_0) \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle (c(t_0)) \\
&\quad + \sum_{i,j} (\alpha_i\beta_j)(t_0) c'(t_0) \left(\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle \right] \right) (*) \\
&= \left\langle \sum_i \alpha_i'(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t_0)} + \sum_i \alpha_i(t_0) \nabla_{c'(t_0)} \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j \beta_j(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{c(t_0)} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_i \alpha_i(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{c(t_0)}, \sum_j \beta_j'(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{c(t_0)} + \sum_j \beta_j(t_0) \nabla_{c'(t_0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{DX}{dt}(t_0), Y(t_0) \right\rangle + \left\langle X(t_0), \frac{DY}{dt}(t_0) \right\rangle_{c(t_0)}
\end{aligned}$$

Erklärung zu (*): Da ∇ Riemannsch ist, gilt:

$$\left[\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle\right] = \left\langle \nabla_{c'(t_0)} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_{c(t_0)} + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{c'(t_0)} \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_{c(t_0)}$$

LEMMA 8.7: Der Längs einer C^∞-Kurve $c\colon I \to M$ in (M, g) induzierte Levi-Civita-Zusammenhang $\frac{D}{\partial t}$ genügt der Produktregel: Für alle $X, Y \in \mathcal{V}_c$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t)\rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}(t), Y(T) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{DX}{dt} \right\rangle$$

BEMERKUNG: Dies ist analog zu $X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Z, \nabla_X Z\rangle$.

DEFINITION 8.8: Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\alpha\colon V \to (M, g)$ differenzierbar (mit $\dim M$ beliebig). Ein *differenzierbares Vektorfeld* längs α ist eine Abbildung $X\colon V \to TM$ mit

- $X(v) \in T_{\alpha(v)}M$ für alle $v \in V \iff \pi \circ X = \alpha$.
- Für jede Karte (M', x) und Darstellung

$$X(v) = \sum_i \xi_i(v) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(v)}, \; v \in \alpha^{-1}(M')$$

  sind die Koeffizientenfunktionen ξ_i differenzierbar.

Bemerkung: Ist $k = 1$ und V ein Intervall, so sind Vektorfelder längs α genau die oben definierten Vektorfelder längs der Kurve $c = \alpha$.

Es bezeichne
$$\frac{DX}{dv_i}(v_0) = \frac{D}{\partial t}\bigg|_0 \big(\underbrace{t \mapsto X(v_0 + te_i)}_{\text{Vektorfeld längs} t \mapsto \alpha(v_0+te_i)} \big)$$
wobei $\frac{D}{\partial t}$ die induzierte Levi-Civita-Ableitung längs der Kurve.

Ziel: Für $k = 2$, $\alpha\colon V \to (M, g)$ mit $(s,t) \mapsto \alpha(s,t)$ und die Vektorfelder $\frac{\partial\alpha}{\partial s}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ längs α gilt:
$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$
Diese Eigenschaft ist äquivalent zur Torsionsfreiheit von ∇.

Satz 9.2: (1. Varianzformel) Sei $\alpha\colon [a,b] \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \to (M,g)$ mit $(t,u) \mapsto c^u(t)$ stückweise differenzierbare Variation einer Kurve $c = c^0$ mit $\|\dot c\| \equiv v > 0$. Dann ist die Funktion $u \mapsto L(c^u)$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\bigg|_0 L(c^u) \quad &= \quad -\frac{1}{v}\int_a^b \left\langle \frac{D\dot c}{dt}(t), X(t)\right\rangle dt \\ &\quad +\frac{1}{v}\left\langle X(t), \dot c(t)\right\rangle \big|_a^b \\ &\quad -\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k-1}\langle X(t_i), \dot c(t_i+) - \dot c(t_i-)\rangle\end{aligned}$$

Beweis: Jede Funktion

$$L_i(i) \quad := \quad L(c^u|_{[t_{i-1},t_i]}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

ist eine C^∞-Funktion (vergleiche Lemma 3.7) mit Ableitung in t gleich 0 wie folgt:

$$
\begin{aligned}
L_i'(0) &= \frac{1}{v}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \underbrace{\frac{D}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)}_{\nabla\text{torsionsfrei:}\quad =\left(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)(t,0)}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)\right\rangle dt \\
&= \frac{1}{v}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\{ \frac{d}{dt}\left\langle \underbrace{\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0)}_{=X(t)}, \underbrace{\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)}_{=\dot{c}(t)} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0), \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)\right\rangle \right\} dt \\
&= \frac{1}{v}\left\langle X(t), \dot{c}(t)\right\rangle \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \frac{t}{v}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D\dot{c}}{dt}(t), X(t)\right\rangle dt
\end{aligned}
$$

(*) gilt weil Ableitung unter $\int$ und ∇ ist Riemannsch. Aufsummieren dieser Identität für $i = 1, \dots, k$ liefert die gewünschte Formel.

Bemerkung: Ist c differenzierbar und $\frac{D\dot{c}}{dt} \equiv 0 \in \mathcal{V}_c$, so gilt für jede Varianz mit festen Endpunkten

$$\left.\frac{d}{du}\right|_0 L(c^u) = 0$$

Definition 9.3: Eine differenzierbare Kurve $c\colon [a,b] \to (M,g)$ heißt *Geodätische*, falls (für $\dot{c} \in \mathcal{V}_c$) gilt:

$$\frac{D\dot{c}}{dt}(t) \equiv 0$$

Korollar 9.4: Ist c Geodätische, so gilt

$$\left.\frac{d}{du}\right|_0 L(c^u) = 0$$

für jede Variation $(t,u) \mapsto c^u(t)$ von $c = c^0$ mit festen Endpunkten.

Lemma 9.5: Jede Geodätische ist proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t)\right\rangle_{c(t)} = 2\left\langle \underbrace{\frac{D\dot{c}}{dt}(t)}_{\equiv 0}, \dot{c}(t)\right\rangle \equiv 0$$

SATZ 9.6: Ist $c\colon [a,b] \to (M,g)$ stückweise differenzierbar mit $\|\dot{c}\| \equiv v > 0$, und es gilt

$$\left.\frac{d}{du}\right|_0 L(c^u) = 0$$

für jede stückweise differenzierbare Variation $(t,u) \mapsto c^u(t)$ von $c = c^0$ mit festen Endpunkten, so ist c differenzierbar und es gilt

$$\frac{D\dot{c}}{dt}(t) \equiv 0,$$

d.h. c ist Geodätische.

BEISPIEL: c ist kürzeste zwischen $c(a)$ und $c(b)$, d.h. mit $L(c) = d(c(a), c(b))$. Denn dann hat $u \mapsto L(c^u)$ in $u = 0$ ihr absolutes Minimum.

BEWEIS: Wie in Differentialgeometrie 1 beweist man (durch Verknüpfung mit Karten):

(*) Ist $X\colon [a,b] \to TM$ ein stückweise differenzierbares Vektorfeld längs c und liegt $c(\overline{\{t \in [a,b] \mid X(t) \neq 0\}})$ in einer Kartenumgebung M', so gibt es eine stückweise differenzierbare Variation von c mit Variationsfeld X.

Wir beweisen nun den Satz in mehreren Schritten:

1. Jede differenzierbare Teilkurve $c|_{t_{i-1},t_i}$ ist Geodätische: Sei $t_0 \in (t_{i-1}, t_i)$. Für geeignetes $f \in C^\infty([a,b])$ mit $f > 0$ nahe t_0 und $f \equiv 0$ außerhalb $(t-\varepsilon_0, t+\varepsilon_0) \subset [a,b]$ betrachte das Vektorfeld $t \mapsto f(t)\frac{D\dot{c}}{dt}(t)$ längs c. Ohne Einschränkung ist X Variations-Vektorfeld einer Variation $(t,u) \mapsto c^u(t)$ mit $c \equiv c^0$ mit festen Endpunkten und es gilt $X(t_i) = 0$ für $i = 0, \ldots, k$. Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{du}\right|_0 L(c^u) \\ &\overset{X(t_i)=0}{=} -\frac{1}{v}\int_a^b \left\langle \frac{D\dot{c}}{dt}(t), X(t) \right\rangle_{c(t)} dt \\ &= -\frac{1}{v}\int_a^b f(t) \left\| \frac{D\dot{c}(t)}{dt} \right\| dt \end{aligned}$$

Daraus folgt mit $f(t) > 0$:

$$\frac{D\dot{c}(t)}{dt} \equiv 0$$

Wegen Stetigkeit von $t \mapsto \frac{D\dot{c}}{dt}(t)$ folgt: $c|_{[t_{i-1},t_i]}$ ist Geodätische.

2. Für alle $i = 1, \ldots, k-1$ gilt $\dot{c}(t_i+) = \dot{c}(t_i-)$. Währe dazu eine Variation von c mit festen Endpunkten und $X(t_l) = \dot{c}(t_l+) - \dot{c}(t_l-)$ und $X(t_i) = 0$ für alle $i \neq l$ (wobei $l \in k-1\rfloor$ beliebig aber fest gewählt). Nach Voraussetzung, wegen (1) und nach der 1. Varianzformel gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du}\bigg|_u L(c^u) = -\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k-1} \langle X(t_i), \dot{c}(t_i+) - \dot{c}(t_i-)\rangle \\ &= -\frac{1}{v}\,\|\dot{c}(t_l+) - \dot{c}(t_l-)\|^2 \end{aligned}$$

Es folgt: $\dot{c}(t_l+) = \dot{c}(t_l-)$ für $l = 1, \ldots, k-1$.

3. c ist unendlich oft differenzierbar (auch nahe der t_i): Sei $t_0 \in (a, b)$. Dann gibt es eine Karte (M', x) um $c(t_0)$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

   (a) $c([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \subset M'$

   (b) $c|_{[t_0-\varepsilon, t_0]}$ und $c|_{[t_0, t_0+\varepsilon]}$ sind C^∞-Geodätische.

   (c) $\dot{c}(t_0-) = \dot{c}(t_0+)$

   Setze $\tilde{c} = x \circ c$: $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to x(M')$, so gilt für $t \geq t_0$ und $t \leq t_0$:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D\dot{c}}{dt} &= \frac{D}{dt}\sum i = 1^n \tilde{c}_i'(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{c(t)} \\ &= \sum k = 1^n \tilde{c}_k''(t)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg|_{c(t)} + \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i'(t)\nabla\frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \sum k = 1^n \tilde{c}_k''(t)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg|_{c(t)} + \sum_{i,j=1}^n \tilde{c}_i'(t)\tilde{c}_j'(t)\underbrace{\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(c(t))}_{=\sum_k \Gamma_{ji}^k(c(t))\,\frac{\partial}{\partial x_k}\big|_{c(t)}} \end{aligned}$$

   Dies ist äquivalent zu:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}\colon\quad 0 = \tilde{c}_k''(t) + \sum_{i,j} \tilde{c}_i'(t)\tilde{c}_j'(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) \qquad (**)$$

   Also ist $\tilde{c} = x \circ c$ eine C^∞-Kurve als eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (**) mit

$$\begin{aligned} \tilde{c}(t_0) &= x(c(t_0)), \\ \dot{c}(t_0-) = \dot{c}(t_0+) &= \sum_i \tilde{c}_i'(t_0)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{c(t_0)} \end{aligned}$$

(da $\Gamma^k_{ij} \circ c$ eine C^∞-Funktion ist). Damit ist $c|_{(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} = x^{-1} \circ \tilde{c}$ eine C^∞-Kurve und damit – wegen Lokalität der Differenzierbarkeit – $c\colon [a,b] \to (M,g)$ eine C^∞-Kurve. □

Bemerkung: Mitbewiesen wurde die wichtige Beschreibung von Geodätischen in Kartenumgebungen:

Satz 9.7: Eine C^∞-Kurve $c\colon I \to (M,g)$ ist genau dann Geodätische, wenn in jeder Karte (M',x) mit $\tilde{c} = x \circ c|_{c^{-1}(M')}$ und den Christoffel-Symbolen $\Gamma^k_{ij}\colon M' \to \mathbb{R}$ von ∇ bezüglich (M',x) gilt:

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}\colon \quad \tilde{c}''_k(t) + \sum_{i,j} \tilde{c}'_i(t)\tilde{c}'_j(t)\Gamma^k_{ij}(c(t)) \equiv 0$$

Korollar 9.8: Zu jedem $p_0 \in M$ und $v_0 \in T_{p_0}M$ gibt es eine eindeutig bestimmte maximale Geodätische $c\colon I \to (M,g)$, wobei I offen und $0 \in I$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v_0$. Schreibe $c_{v_0} = c$. Jede andere solche Geodätische ist von der Gestalt $c|_J$ mit $0 \in J \subset I$.

Beweis: Für jede Karte (M',x) löst $\tilde{c} = x \circ c$ die oben angegebenen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Korollar 9.9: Ist $c\colon I \to (M,g)$ eine Geodätische, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch $\hat{c}(s) = c(\lambda s + \mu)$ für $s \in J := \{\tilde{s} \in \mathbb{R} \mid \lambda s + \mu \in I\}$ auch eine Geodätische.

Beweis: Ist $\tilde{c} = x \circ c$ Lösung der Differentialgleichung nahe $t_0 = \lambda s_0 + \mu$, so ist auch $\bar{c} := x \circ \hat{c}(s) = x(c(\lambda s + \mu)) = \tilde{c}(\lambda s + \mu)$ eine Lösung nahe s_0:

$$\begin{aligned} & \bar{c}''_k(s) + \sum_{i,j} \bar{c}'_i(s)\bar{c}'_j(s)\Gamma^k_{ij}(c(s)) \\ = \; & \lambda^2 \left\{ \tilde{c}''_k(\lambda s + \mu) + \sum_{i,j} \tilde{c}'_i(\lambda s + \mu)\tilde{c}'_j(\lambda s + \mu)\Gamma^k_{ij}(c(\lambda s + \mu)) \right\} \\ \equiv \; & 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt: auch $\hat{c}$ ist eine Geodätische.

Satz 10.6: *(Gauß-Lemma)* Sei $\exp_p$ ein Diffeomorphismus auf $B_\varepsilon(0_p) \subset (T_pM, g_p)$. Dann schneiden sich für $v_0 \in B_\varepsilon(0_p) \setminus \{0_p\}$ die Teilmenge

$$\exp_p(\{v \in T_pM \mid \|v\| = \|v_0\|\}) \subset M$$

(*geodätische Sphäre* vom Radius $\|v_0\|$ um p) und die radiale Geodätische $c_{v_0}\colon [0,1] \to M$ in $c_{v_0}(1) = \exp(v_0)$ senkrecht.

Beweis: Sei $u \mapsto \beta(u)$ eine nahe 0 definierte differenzierbare Kurve in M mit $\beta(0) = \exp_p(v_0)$ und $\mathrm{Bild}(\beta) \subset \exp_p(\{v \mid \|v\| = \|v_0\|\})$. Setze

$$v(u) = \left(\exp_p|_{B_\varepsilon(0_p)}\right)^{-1}(\beta(u)) \in T_pM$$

Es gilt: $\|v(u)\| = \|v_0\|$ für alle u. Zu zeigen ist nun: $c'_{v_0}(1) \perp \beta'(0)$. Betrachte die Variation

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon [0,1] \times (-\delta, +\delta) & \to & M \\ (t,u) & \mapsto & c^u(t) := \exp_p(tv(u)) \end{array}$$

D.h. jedes c^u, $|u| < \delta$ ist radiale Geodätische und zwar der Länge

$$L(c^u) = \|\dot{c}^u(t)\| = \|\dot{c}^u(0)\| = \|v(u)\| = \|v_0\|$$

Es gilt daher nach der 1. Variationsformel:

$$0 = \left.\frac{d}{du}\right|_0 L(c^u) = \left.\left\langle X(t), \dot{c}^0(t)\right\rangle\right|_0^1$$

Dabei gilt

$$X(t) = \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_0 \exp_p(t \cdot v(u))$$

und damit

$$\begin{array}{rcl} X(0) & = & \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_0 (u \mapsto p) = 0_p \\ X(1) & = & \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_0 \underbrace{\exp_p(v(u))}_{=\beta(u)} = \beta'(0) \end{array}$$

Wegen $c^0 = c_{v_0}$ folgt:

$$0 \;=\; \left\langle X(1), \dot{c}^0(1)\right\rangle_{c^0(1)} = \langle \beta'(0), \dot{c}_{v_0}(1)\rangle_{c_{v_0}(1)}$$

Satz 10.7: Sei $\exp_p|_{B_\varepsilon(0_p)}$ ein Diffeomorphismus auf sein (offenes) Bild $M' \subset M$. Sei $c\colon [a,b] \to M' \setminus \{p\}$ stückweise differenzierbar, etwa von der Form

$$\begin{array}{rcl} c(t) & = & \exp_p(w(t)) \\ w\colon [a,b] & \to & B_\varepsilon(0_p) \setminus 0_p \ \text{ stückweise differenzierbar} \end{array}$$

Dann gilt:

1. $L(c) \geq |\|w(w)\| - \|w(b)\||$
2. In (1) gilt die Gleichheit genau dann, wenn $t \mapsto \frac{w(t)}{\|w(t)\|}$ konstant ist und $t \mapsto \|w(t)\|$ monoton ist (d.h. $t \mapsto w(t)$ durchläuft monoton eine Strecke auf einer Ursprungsgeraden in T_pM).

Beweis: Setze $v(t) = \frac{w(t)}{\|w(t)\|}$ und $r(t) = \|w(t)\|$ für $a \leq t \leq b$. Sei

$$\begin{aligned} \alpha\colon (0, \varepsilon) \times [a,b] &\to M' \setminus \{p\} \\ (r,t) &\mapsto \exp_p(r \cdot v(t)) \end{aligned}$$

(so dass $\alpha(r(t), t) = c(t)$). Nach dem Gauß-Lemma gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial r}(r_0, t_0) &= \left.\frac{d}{dr}\right|_{r_0} c_{v(t_0)}(r) \\ &= \dot{c}_{v(t_0)}(r_0) \perp \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \exp_p(r_0 \cdot v(t)) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(r_0, t_0) \end{aligned}$$

sowie

$$\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial r}(r_0, t_0) \right\| = \left\| \dot{c}_{v(t_0)}(r_0) \right\| = \left\| \dot{c}_{v(t_0)}(0) \right\| = \|v(t_0)\| = 1$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & \dot{c}(t) = \frac{d}{dt}\alpha(r(t), t) = r'(t)\frac{\partial \alpha}{\partial r}(r(t), t) + \frac{\partial \alpha}{\partial t}(r(t), t) \\ \Longrightarrow\quad & \|\dot{c}(t)\| = \sqrt{[r'(t)]^2 \cdot 1 + \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(r(t), t) \right\|^2} \\ \Longrightarrow\quad & L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt \geq \int_a^b |r'(t)|\, dt \geq \left| \int_a^b r'(t) \right| \\ & = |r(b) - r(a)| = |\|w(b)\| - \|w(a)\|| \end{aligned}$$

Dabei gilt die Gleichheit genau dann, wenn:

1. $$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{\partial \alpha}{\partial t}(r(\tau), \tau) = \left.\frac{d}{d\sigma}\right|_0 \alpha(r(\tau), \tau + \sigma) \\ &= \left.\frac{d}{d\sigma}\right|_0 \exp_p(r(\tau) v(\tau + \sigma)) = (d\exp_p)_{r(\tau)v(\tau)}(r(\tau) \cdot v'(\tau)) \end{aligned}$$

   Es folgt: $v'(\tau) = 0$ für alle τ, somit ist $t \mapsto v(t)$ konstant.

2.

$$\begin{aligned}\int_a^b |r'(t)|\, dt = \left|\int_a^b r'(t)dt\right| = \pm \int_a^b r'(t)dt \\ \iff r' \text{hat konstantes Vorzeichen} \\ \iff t \mapsto r(t) = \|w(t)\| \text{ ist monoton}\end{aligned}$$

Korollar 10.8: Seien $p \in M, \varepsilon > 0$ wie in 10.7. Dann ist für jedes $v \in T_pM$ mit $\|v\| \leq \varepsilon$ die Geodätische $c_v\colon [0,1] \to (M,g)$ zwischen p und $\exp_p(v)$ auch die Kürzeste, d.h. für jede andere stückweise differenzierbare Kurve $c\colon [a,b] \to (M,g)$ von $c(a) = p$ nach $c(b) = \exp_p(v)$ gilt $L(c) \geq L(c_v)$. Ferner gilt Gleichheit genau dann, wenn $c = c_v \circ \varphi$ mit $\varphi\colon [a,b] \to [0,1]$ stückweise differenzierbar, monoton wachsend und surjektiv.

Beweis: Seien v und c wie oben angegeben. Ohne Einschränkung gilt $v \neq 0_p$ (sonst ist c_v eine Punktkurve und das Korollar trivial). Setze $a' = \max\{t \in [a,b] \mid c(t) = p\}$. Wir betrachten zwei Fälle:

Fall 1. $c([a',b]) \subset M' = \exp_p(B_\varepsilon(0_p))$. Dann hat c auf $[a',b]$ die Darstellung $c(t) = \exp_p(w(t))$ mit $\|w(t)\| < \varepsilon$ für $a' \leq t \leq b$, $w(a') = 0_p$, $w(b) = v$. Nach 10.7 gilt:

$$\begin{aligned} L(c) &= L\left(c|_{[a,a']}\right) + L\left(c|_{[a',b]}\right) \geq L\left(|_{[a',b]}\right) \\ &\overset{10.7}{\geq} \left|\|w(b)\| - \|w(a')\|\right| = \|w(b)\| = \|v\| = L(c_v) \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt $L(c) = L(c_v)$ genau dann, wenn $c|_{[a,a']} \equiv p$ gilt und für alle $a' < t \leq b$ gilt:

$$\begin{aligned} c(t) &= = \exp_p\left(\|w(t)\| \cdot \frac{w(t)}{\|w(t)\|}\right) \overset{10.7}{=} \exp_p\left(\|w(t)\| \cdot \frac{v}{\|v\|}\right) \\ &= c_v\left(\frac{\|w(t)\|}{\|v\|}\right) =: c_v(\varphi(t)) \end{aligned}$$

wobei φ nach 10.7 monoton ist.

Fall 2. $c([a',b])$ liege nicht ganz in M'. Dann gibt es ein $b' \in (a',b)$ mit $c([a',b']) \subset M'$ aber $c(b') = \exp_p(v')$ mit $\|v\| < \|v'\| < \varepsilon$. Wie im Fall 1 folgt:

$$L(c) \geq L\left(c|_{[a',b']}\right) \overset{10.7}{\geq} \left|\|0_p\| - \|v'\|\right| = \|v'\| > \|v\| = L(c_v)$$

Im Fall 2 ist die Gleichheit somit ausgeschlossen.

KOROLLAR 10.9: Seien $p \in M, \varepsilon > 0$ wie in 10.7. Dann gilt für alle $r < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} B_r^d(p) &:= \{q \in M \mid d(p,q) < r\} = \exp_p(B_r(0_p)) \\ S_r^d(p) &:= \{q \in M \mid d(p,q) = r\} = \exp_p(S_r(0_p)) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $B_r^d(p)$ (*geodätischer Ball* vom Radius r um p) diffeomorph zu einem Euklidischen n-dimensionalen Ball und $S_r^d(p)$ diffeomorph zu einer Standard $(n-1)$-Sphäre im $\mathbb{R}^n$.

BEMERKUNG: Auf der $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit 1. Fundamentalform kann man $\varepsilon = \pi$ wählen. Für $r > \pi$ ist $\exp_p(B_r(0_p)) = S^2$, damit kompakt und nicht diffeomorph zu einem Euklidischen Ball.

KOROLLAR 10.10: Ist $c : [a,b] \to (M,g)$ eine Geodätische und $t_0 \in [a,b)$, so existiert ein $\varepsilon \in (0, b-t_0)$, so dass $c|_{[t_0,t_0+\varepsilon]}$ Kürzeste ist.

BEWEIS: Setze $p = c(t_0)$, $s \mapsto c(t_0+s)$ ist radiale Geodätische ab p.

BEMERKUNG: In Verallgemeinerung von 10.5 lässt sich zeigen:

$$\widetilde{TM} \to M \times M, \quad v \mapsto (\pi(v), \exp(v))$$

ist ein Diffeomorphismus nahe 0_p mit $p \in M$ beliebig. Es folgt:

- Jedes $p \in M$ besitzt offene Umgebung $M' \subset M$, so dass zwischen je zwei $p, q \in M'$ eine (bis auf Umparametrisierungen eindeutige) Kürzeste existiert.
- Geodätische sind genau die stückweise differenzierbaren Kurven, die lokal Kürzeste sind und proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

9 Der Riemannsche Krümmungstensor

DEFINITION 11.1: Der $(1,3)$-Tensor

$$\begin{aligned} R\colon \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M \times \mathcal{V}M &\to \mathcal{V}M \\ (X,Y,Z) &\mapsto \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

heißt *Riemannscher Krümmungstensor*.

9.1 Symmetrieeigenschaften von R

LEMMA 11.2: Sei R der Riemannsche Krümmungstensor (d.h. bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhang ∇ berechnet). Für beliebige $W, X, Y, Z \in \mathcal{V}M$

gilt:

1. $R(X,Y,Z) = -R(Y,X,Z)$
2. $\langle R(X,Y,W),Z\rangle = -\langle R(X,Y,Z),W\rangle =: R(X,Y,W,Z)$.
3. $R(X,Y,Z) + R(Y,Z,X) + R(Z,X,Y) = 0$ (*1. Bianci-Identität*)
4. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$ (*Blocksymmetrie*)

BEWEIS: Da R Tensor ist, ist $R(X,Y,Z)(p)$ nur von $X(p), Y(p), Z(p)$ abhängig. Es reicht daher der Nachweis von (1)-(4) im Spezialfall, dass $W,X,Y,Z \in \mathcal{V}M$ Koordinaten-Vektorfelder sind (insbesondere mit Lieklammern gleich 0).

1. Folgt aus der Definition von R.
2. Sei $V \in \mathcal{V}M$. Es gilt:

$$\begin{aligned} R(X,Y,V,V) &= \underbrace{\langle \nabla_X \nabla_Y V, V\rangle}_{=X(\langle \nabla_Y V,V\rangle) - \langle \nabla_Y V, \nabla_X V\rangle} - \langle \nabla_Y \nabla_X V, V\rangle \\ &= \frac{1}{2} X(Y(\langle V,V\rangle)) - \frac{1}{2} Y(X(\langle V,V\rangle)) \\ &= \frac{1}{2}[X,Y](\langle V,V\rangle) = 0 \end{aligned}$$

   Nun folgt für alle p:

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \left.\frac{d}{dt}\right|_0 R(X,Y,sW+tZ,sW+tZ)(p) \\ &= R(X,Y,W,Z)(p) + R(X,Y,Z,W)(p) \end{aligned}$$

3. Für $X_i \in \mathcal{V}M'$, $i \in \mathbb{Z}_3$ mit $[X_i, X_j] \equiv 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\mathbb{Z}_3} R(X_i, X_{i+1})X_{i+2} &= \sum_{i\in\mathbb{Z}_3} \left\{ \nabla_{X_i}\nabla_{X_{i+1}} X_{i+2} - \nabla_{X_{i+1}}\nabla_{X_i} X_{i+2} \right\} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}_3} \nabla_{X_i} \left\{ \underbrace{\nabla_{X_{i+1}}\nabla_{X_{i+2}} - \nabla_{X_{i+2}}\nabla_{X_{i+1}}}_{=[X_{i+1},X_{i+2}]} \right\} \equiv 0 \end{aligned}$$

   Wegen Multilinearität/Tensor-Eigenschaft von

$$(X,Y,Z) \mapsto R(X,Y,Z) + R(Y,Z,Z) + R(Z,X,Y)$$

   folgt die 1. Bianci-Identität.

4. Für $Y_i \in \mathcal{V}M'$, $i \in \mathbb{Z}_4$ mit $[Y_i, Y_j] \equiv 0$ benutzen wir die Abkürzung

$$R_{klmn} = R(Y_k, Y_l, Y_m, Y_n)$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{rl} 0 & = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}_4} \{R_{k,k+1,k+2,k+2} + R_{k+1,k+2,k,k+3} + R_{k+2,k,k+1,k+3}\} \\ & \begin{array}{cccccccccccc} & R_{1234} & + & R_{2314} & + & R_{3124} & & & & & & \\ = & & + & R_{2341} & & & + & R_{3421} & + & R_{4231} & & \\ & & & & + & R_{1342} & + & R_{3412} & & & + & R_{4132} \\ + & R_{1243} & & & & & & & + & R_{2413} & + & R_{4123} \end{array} \\ & = 2 \cdot R_{1342} - 2 \cdot R_{4213} \end{array}$$

Also folgt:

$$R(Y_1, Y_3, Y_4, Y_2) = R(Y_4, Y_2, Y_1, Y_3)$$

Lemma 11.3: Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\alpha\colon V \to (M, g)$, $(s,t) \mapsto \alpha(s,t)$ differenzierbar und $X\colon V \to TM$ ein differenzierbares Vektorfeld längs α (siehe 8.8). Dann gilt für alle $(s,t) \in V$:

$$\left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}X\right)(s,t) - \left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}X\right)(s,t) = R_{\alpha(s,t)}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}(s,t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(s,t)\right)$$

Beweisskizze: Schreibe lokal

$$X(s,t) = \sum_i \xi_i(s,t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(s,t)}$$

und mit $\tilde{\alpha} = x \circ \alpha\colon \alpha^{-1}(M') \to \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \alpha$$

und $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ analog. Es folgt z.B.:

$$\frac{DX}{\partial t}(s,t) = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial t}(s,t) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\alpha(s,t)} + \sum_i \xi_i(s,t) \nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{D}{\partial s}\frac{DX}{\partial t}\right) - \left(\frac{D}{\partial t}\frac{DX}{\partial s}\right) \\
= & \sum_{i,j,k} \xi_i \frac{\partial \tilde{\alpha}_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial \tilde{\alpha}_k}{\partial s} \left(\underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i}}_{=R(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i})} \right) \\
= & R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}, X\right)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Symmetrien von R liegen es nahe, Ausdrücke der Form $R(X, Y, Y, X)$ zu betrachten. Wir stellen fest:

1. Bei Kenntnis aller solchen Ausdrücke (für beliebige $X, Y \in \mathcal{V}M$) lässt sich R rekonstruieren: Es gilt für $p \in M$ und $X, Y, Z, Z \in \mathcal{V}M$:

$$\begin{aligned}
& 6 \cdot R(X, Y, Z, W)(p) \\
= & \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{R(X + sZ, Y + tW, Y + tW, X + sZ)(p) - \\
& R(X + sW, Y + tZ, Y + tZ, X + sW)(p)\}
\end{aligned}$$

2. Sind $X(p), Y(p)$ kollinear, so folgt $R(X, Y, Y, X)(p) \equiv 0$ (wegen $R(X, X, U, V) \equiv 0$ und Eigenschaft (1)).

3. Sind $x, y \in T_pM$ linear unabhängig und $\sigma = \langle\{\rangle\, x, y\} \leq T_pM$, so gilt für $A \in \mathrm{GL}(\sigma)$ mit $\tilde{x} = Ax = Ax + \gamma y$, $\tilde{y} = Ay = \beta x + \delta y$. D.h. die Darstellende Matrix für A bezüglich der Basis $\{x, y\}$ von σ ist

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Berechne

$$\begin{aligned}
R_p(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}, \tilde{x}) &= R_p(\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y, \ldots, \ldots) \\
&= \ldots = (detA)^2 \cdot R_p(x, y, y, x)
\end{aligned}$$

Anderseits gilt:

$$\|\tilde{x}\|^2 \cdot \|\tilde{y}\|^2 - \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle^2 = (\det A)^2 \cdot (\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2)$$

Beachte: Linke Seite ist die Fläche des von $\tilde{x}, \tilde{y}$ angespannten Parallelogramms, weiter ist

$$|\det A| = \frac{\mathrm{vol}_2(A \cdot K)}{\mathrm{vol}_2(K)}$$

für jedes Kompaktum $K \subset \sigma$ mit nicht-leerem Inneren, setze K gleich dem von x, y angespannten Parallelogramm. Es folgt: Die Größe

$$K_p(X,Y) = \frac{R_p(x,y,y,x)}{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x,y \rangle^2}$$

ist nur von $\sigma = \langle\{\rangle\, x, y\}$ abhängig und nicht von der Wahl der Basis für σ.

DEFINITION 11.4: Sei $p \in (M,g)$, $\sigma \leq T_pM$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum und $\{x,y\}$ eine Basis von σ. Dann heißt

$$K(\sigma) := K(x,y) = \frac{\langle R_p(x,y,y),x \rangle}{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x,y \rangle^2}$$

die *Schnittkrümmung* der Tangentialebene σ.

BEMERKUNGEN:

- Ist $\{x,y\}$ orthonormal, so folgt $K(\sigma) = R_p(x,y,y,x)$.
- Wir berechnen in einer Karte (M', x)

$$\begin{aligned}
& R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} \\
= \;& \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\
= \;& \sum_i \left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left(\Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right\} \\
= \;& \sum_m \left\{ \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x_j} + \sum_l \left\{ \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m \right\} \right\} \frac{\partial}{\partial x_m}
\end{aligned}$$

und damit eine Formel für $K\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Ist M 2-dimensional, so ergibt der Vergleich mit dem Theorema Egregium, dass gilt: $K(\sigma) = K(T_pM)$ gleich der Gauß-Krümmung von M in p. Somit verallgemeinert $K(\sigma)$ die Gaußkrümmung von Flächen auf höherdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

BEMERKUNG: Die Schnittkrümmung ist eine *Invariante* Riemannscher Mannigfaltigkeit, d.h. invariant unter Isometrien: Sei $f\colon (M,g) \to (N,\tilde{g})$, $p \in M$, $q \in f(p) \in N$, ferner $\sigma \leq T_pM$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum sowie $\tilde{\sigma} := df_p(\sigma) \leq T_qN$. *Behauptung:*

$$K^{(M,g)}(\sigma) = K^{(N,\tilde{g})}(\tilde{\sigma})$$

Beweis: Aus der Invarianz des Levi-Civita-Zusammenhangs unter Isometrien folgt

$$R_q^{(N,\tilde{g})}(df_p(x), df_p(y), df_p(z)) \quad = \quad df_p(R_p(x,y,z))$$

und damit die Behauptung.

BEISPIELE:

1. $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dann ist $R \equiv 0$, also für alle $p \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma \leq T_pM$ gilt $K(\sigma) \equiv 0$.

2. Sei (M,g) die Sphäre vom Radius r in $\mathbb{R}^n$ um 0. Dann gilt

$$R_p(x,y,z) \quad = \quad \frac{1}{r^2}\left(\langle y,t\rangle_0\, x - \langle x,z\rangle_0\, y\right)$$

   Also gilt $K(\sigma) = \frac{1}{r^2}$ für jede tangentiale 2-Ebene σ.

3. Für den n-dimensionalen hyperbolischen Raum

$$\mathbb{H}^n = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_r > 0\}$$

   mit der Metrik

$$g_u(v,w) = \frac{\langle v,w\rangle_0}{u_n^2}, \quad u \in \mathbb{H}^n$$

   gilt

$$R_u(x,y,z) \quad = \quad -\{g_u(y,z)\cdot x - g_u(x,z)\cdot y\}$$

   Also gilt $K(\sigma) \equiv -1$.

10 Geometrische Interpretation der Krümmungen

Dieses Kapitel wurde übersprungen.

11 Die zweite Variationsformel einer Geodätischen

Satz 13.1: Sei $c\colon [a,b] \to (M,g)$ eine BLP-Geodätische und

$$\alpha\colon [a,b] \times (-\delta,\delta) \to (M,g), \quad (t,u) \mapsto c^u(t)$$

differenzierbare Variation mit festen Endpunkten von $c^0 = c$. Sei

$$X(t) = \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_0 c^u(t) \in T_{c(t)}M$$

das Variationsvektorfeld und

$$X^\perp(t) = X(t) - \langle X(t), \dot c(t)\rangle\, \dot c(t)$$

seine zu c senkrechte Komponente. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{du}\right|_0 L(c^u) &= 0 \quad (\text{ 1. Variationsformel }) \\ \left.\frac{d^2}{du^2}\right|_0 L(c^u) &= \int_a^b \left\{ \left\| \frac{DX}{\partial t}(t) \right\| - K(\dot c(t), X^\perp(t)) \cdot \left\| X^\perp(t) \right\|^2 \right\} dt \end{aligned}$$

Dabei gilt die Konvention $K(\dot c, X^\perp) \left\| X^\perp \right\| := 0$ auf $\left\{ t \mid X^\perp(t) = 0 \right\}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} L(c^u) &= \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\rangle}{2\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\rangle^{1/2}} dt \\ &= \int_a^b \frac{\left\langle \left(\frac{D}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\rangle}{\left\langle \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\rangle^{1/2}} dt \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{d^2}{du^2}\right|_0 L(c^u)\\
= &\int_a^b \left.\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,u), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\rangle \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\|^2 - \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,u), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\rangle^2}{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u)\right\|^3}\right|_{u=0} dt\\
= &\int_a^b \left\{\left\langle \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)\right\rangle + \left\|\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0)\right\|^2 - \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)\right\rangle^2\right\} dt\\
= &\int_a^b \left\{\left\|\frac{DX^\perp}{\partial t}(t)\right\|^2 - \langle R(X(t),\dot c(t),\dot c(t))X(t)\rangle\right\} dt + \left.\left\langle \frac{D}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0), \dot c(t)\right\rangle\right|_{t=a}^b
\end{aligned}
$$

Nebenberechnung A:

$$
\begin{aligned}
&\langle R(X(t),\dot c(t),\dot c(t))X(t)\rangle\\
= &\left\langle R(X^\perp + \dot c(t), \dot c(t), \dot c(t)), X^\perp + \dot c(t)\right\rangle\\
= &\left\langle R(X^\perp, \dot c(t), \dot c(t)), X^\perp\right\rangle\\
= &K(X^\perp(t), \dot c(t)) \cdot \left\{\left\|X^\perp(t)\right\|^2 \cdot \|\dot c(t)\|^2 - \left\langle X^\perp(t), \dot c(t)\right\rangle^2\right\}\\
= &K(X^\perp(t), \dot c(t)) \cdot \left\|X^\perp(t)\right\|^2
\end{aligned}
$$

Nebenberechung B:

$$
\left\langle \frac{D}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0), \dot c(t)\right\rangle \equiv 0
$$

(da $\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0) \equiv 0$ für $t \in \{a,b\}$)
Nebenrechnung 1:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0)\right\rangle\\
\overset{11.3}{=} &\left.\left\langle R\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial u}\right), \frac{d\alpha}{dt}\right\rangle\right|_{(t,0)} + \frac{d}{dt}\left.\left\langle \frac{D}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\rangle\right|_{(t,0)}\\
= &\left\langle R_{c(t)}(X(t), \dot c(t), X(t)), \dot c(t)\right\rangle_{c(t)} + \frac{d}{dt}\langle \ldots, \ldots\rangle
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung 2:

$$
\begin{aligned}
& \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial u}(t,0), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,0) \right\rangle^2 dt \\
= & \left\| \frac{DX}{\partial t}(t) \right\|^2 - \left\langle \frac{DX}{\partial t}(t), \dot{c}(t) \right\rangle^2 \\
= & \left\| \frac{D}{\partial t}\left\{ t \mapsto X(t) - \langle X(t), \dot{c}(t) \rangle \right\} \dot{c}(t) \right\| \\
= & \left\| \frac{DX^\perp}{\partial t}(t) \right\|^2
\end{aligned}
$$

BEMERKUNGEN:

1. Entscheidend ist das Vorzeichen der Schnittkrümmung $K(X^\perp, \dot{c}(t))$: Gilt z.B. $K(\sigma) \leq 0$ für alle σ (wie in der hyperbolischen Geometrie oder Minimalflächen), so folgt für jede Variation von $c = c^0$ mit festen Endpunkten

   $$\frac{d^2}{du^2}\bigg|_0 L(c^u) > 0$$

   Ausnahme: $\frac{DX^\perp t}{\partial \equiv} 0$ (lokale eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung). Mit $X^\perp(a) \equiv 0$ folgt $X^\perp(t) \equiv 0$ für alle t, solche Variationen sind uninteressant.

   Nun folgt: $u \mapsto L(c^u)$ hat unter jeder (interessanten) Variation ein lokales Minimum in $u = 0$. Somit ist $t \mapsto c(t)$ die Kürzeste unter allen Kurven mit denselben Endpunkten, die nahe genug bei c liegen (diese Aussage ist globar i.A. falsch).

   Gegenbeispiel zur globalen Aussage: Geodätischen auf dem Zylinder

   $$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + x^2 = R^2 \right\} \times R$$

Nutzbringende Anwendung von 1. und 2. Variationsformel, falls jede Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Dieser Fall wird charakterisiert durch den folgenden Satz:

SATZ: (*Hopf-Rinow*) Sei (M, g) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Abstandsfunktion $d\colon M \times M \to [0, \infty)$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein $p_0 \in M$, so dass $\exp_{p_0}$ auf ganz $T_{p_0}M$ definiert ist (also Geodätische ab p_0 sind stets auf ganz $\mathbb{R}$ definierbar).

2. Für jedes $p \in M$ ist $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert ist.

3. Der metrische Raum (M, d) ist vollständig.

Wenn (1)-(3) erfüllt sind, dann folgt: Zwischen beliebigen $p, q \in M$ existiert stets eine kürzeste Verbindungskurve (i.A. nicht eindeutig).

Gilt (1)-(3), so heißt (M, g) eine *(geodätisch) vollständige* Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Beispiel: Ist M kompakt, so ist (M, d) kompakt und somit (M, d) vollständig.

Zur Ergänzung:

Satz: (*Hadamard-Cartan*) Sei (M, g) zusammenhängend, vollständig, einfach zusammenhängend, und es gelte $K(\sigma) \leq 0$ für alle Tangentialebenen σ. Dann ist für jedes $p \in M$ die Exponentialabbildung $\exp_p\colon T_pM \to M$ ein Diffeomorphismus. Insbesondere gilt $M \approx \mathbb{R}^n$, und für je zwei $p, q \in M$ gibt es bis auf Umparametrisierung genau eine verbindende Geodätische. Folglich ist jede Geodätische Kürzeste.

Bemerkung: Solche Riemannschen Mannigfaltigkeiten bilden eine große Klasse.

Index