

Lineare Algebra 2

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teilweise **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

7	Das Minimalpolynom einer linearen Abbildung	1
7.1	Elementare Eigenschaft von Ringhomomorphismen	1
7.2	Annulatoren	2
7.3	Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume	2
7.3.1	Existenz/Erzeugung von Annulatoren	2
7.3.2	Definition von Eigenwert, -vektor und -räumen	3
7.3.3	Unabhängigkeit von Eigenvektoren, Anzahl der Eigenwerte	5
7.4	Direkte Summen und Diagonalisierbarkeit	5
7.4.1	Direkte Summe	5
7.4.2	Kriterien für direkte Summen	6
7.4.3	Direkte Summe der Eigenräume	7
7.4.4	Teiler, teilerfremd	7
7.4.5	Kern von zwei Teilern von Polynomen auf Abbildungen	7
7.4.6	Kern von mehreren Teilern von Polynomen auf Abbildungen	8
7.4.7	Diagonalisierbarkeit	9
7.4.8	Diagonalisierbarkeitskriterium	9
7.5	Das charakteristische Polynom	10
7.5.1	Nullstellen des charakteristischen Polynoms	12
7.5.2	Char. Polynom im invarianten Unter- und Faktorraum	12
7.5.3	Matrix mit Minimalpolynom = char. Pol	13
7.5.4	Satz von Cayley-Hamilton	15
7.6	Bemerkung über unendlichdimensionale Vektorräume	16
8	Normalform linearer Abbildungen	16
8.1	invariant, zyklisch, unzerlegbar	16
8.2	Zerlegung in φ -zyklische Unterräume	17
8.2.1	direkte Summe φ -unzerlegbarer Unterräume	17
8.2.2	Minimalpolynom unzerlegbarer Vektorräume	17
8.2.3	Bild/Kern von Faktoren des Minimalpolynoms	17
8.2.4	invarianter Unterraum \oplus zyklischer Unterraum	19
8.2.5	unzerlegbar \Rightarrow zyklisch	21
8.2.6	Bedingung für zyklisch \Rightarrow unzerlegbar	21
8.2.7	direkte Summe zyklischer und unzerlegbarer Unterräume	22
8.2.8	Zerlegungssatz	23
8.3	Die allgemeine Normalform	23
8.3.1	Satz über die allgemeine Normalform	23
8.3.2	Beispiele	24

8.4	Die Jordansche Normalform	24
8.4.1	Satz über die Jordansche Normalform	25
8.4.2	Beispiele	26
9	Alpha-Bilinearform	26
9.1	Körperautomorphismen	26
9.2	Eigenschaften der Bilinearform	27
9.2.1	Gram'sche Matrix	28
9.2.2	reguläre Bilinearform	28
9.2.3	Gram'sche Matrizen verschiedener Basen	29
9.2.4	Vektorraum der α -Bilinearformen	30
9.3	Der duale Vektorraum	30
9.3.1	Isomorphiesatz	31
9.3.2	Dimensionssatz	32
9.3.3	der $(\text{Raum}^*)^*$	33
9.3.4	Dualitätssatz	34
9.3.5	Abbildungen ϱ_w und ${}_w\varrho$	35
9.3.6	Abbildung $V \rightarrow V^*$	35
9.4	Orthosymmetrische Alpha-Bilinearform	37
9.4.1	Definitionen	37
9.4.2	Senkrechträume sind Unterräume („Jippie!!!“)	38
9.4.3	Dimensionssatz	38
9.4.4	der $(\text{Raum}^\perp)^\perp$	39
9.4.5	Klassen von Bilinearformen	40
9.4.6	Automorphismus und inverses Element	41
9.4.7	Äquivalenz zwischen Bilinearformen	42
9.4.8	Klassifikationsatz für orthosym. Alpha-Bilinearf.	42
10	Isometrien	44
10.1	Orthogonale Zerlegungen	45
10.1.1	unitär/orthogonal folgt ($V = \text{rad } V$ gdw. symplektisch)	45
10.1.2	unitär/orthogonal \Rightarrow Orthogonalbasis und Diagonalmatrix	46
10.1.3	(an)isotrop, hyperbolisch	46
10.1.4	Isotropie	46
10.1.5	Körperlemma	47
10.1.6	Existenz eine hyperbolischen Paares	47
10.1.7	Unterraum durch hyperbolische Paare „aufblasen“	49
10.1.8	Zerlegung eines Raumes in hyperbolische Ebenen	50
10.1.9	Vektorräume gerader Dimension	50
10.2	Isometrien	51

10.2.1	Definition	51
10.2.2	Gruppe der Isomorphismen	51
10.2.3	Kriterium für Isometrie	52
10.2.4	Beispiele	52
10.2.5	Klassifikationssatz für symplektische Räume	54
10.2.6	Körperlemma	54
10.2.7	Klassifikation von anisotropen Vektorräumen	55
10.2.8	Klassifikation von Vektorräumen (f orthogonal)	57
10.2.9	Klassifikation von Vektorräumen (f unitär)	58
10.2.10	Trägheitssatz von Sylvester	59
10.2.11	Klassifikationssatz für orthogonale und unitäre Räume	60
10.2.12	Satz von Witt	61
11	Skalarprodukte	65
11.1	Grundlagen	65
11.1.1	Definition	65
11.1.2	Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt	66
11.1.3	Schwarzsche Ungleichung	66
11.1.4	(induzierte) Normen	67
11.2	Normierte Vektorräume	67
11.2.1	Stetigkeit linearer Abbildungen mit Norm	68
11.2.2	Äquivalente Normen	68
11.2.3	Stetigkeit linearer Abbildungen	69
11.3	Adjungierte Abbildungen	69
11.3.1		70
11.3.2	Existenz der adjungierten Abbildung	70
11.3.3	Eigenschaften der adjungierten Abbildung	72
11.3.4	adjungierte Matrix	72
11.3.5	Determinante, Eigenwerte	73
11.3.6	Isomorphismus lin. Abbildungen/Bilinearformen	74
11.4	Normale Abbildungen	75
11.4.1	Definitionen	75
11.4.2	Kriterium für normale Abbildungen	75
11.4.3	normale, selbstadjungierte, unitäre Matrizen	76
11.4.4	Räume der orthogonalen/unitären Bilinearformen	76
11.4.5	Eigenwerte der adjungierten Abbildung	76
11.4.6	invariante Unterräume	77
11.4.7	Orthogonalbasis aus Eigenvektoren	77
11.4.8	Hauptachsentransformation	78
11.4.9	Charakterisierung der normalen Abbildungen über \mathbb{C}	78

11.4.10 Charakterisierung der selbstadjungierten Abbildungen über \mathbb{C}	80
11.4.11 Charakterisierung der unitären Abbildungen über \mathbb{C} . .	81
11.4.12 Quadratische Gleichungen mit mehreren Variablen . . .	82

7 Das Minimalpolynom einer linearen Abbildung

Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K und $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. $\text{Hom}(V, V)$ ist ein Vektorraum über K , $\text{Hom}(V, V)$ ist zudem ein Ring mit 1 ¹.

- Addition: $v(\alpha + \beta) := v\alpha + v\beta$ (mit $v \in V$ und $\alpha, \beta \in \text{Hom}(V, V)$)
- Skalarmultiplikation: $v(k\alpha) := k(v\alpha)$ (mit $k \in K, v \in \text{Hom}(V, V)$)
- Multiplikation: $v(\alpha\beta) := (v\alpha)\beta$

$K[x]$ ist Polynomring über K , also kommutativ mit 1 , nullteilerfrei und Hauptideal. $\sum_{i=0}^n k_i \varphi^i \in \text{Hom}(V, V)$ (mit $k_i \in K$; beachte: $\varphi^0 := \text{id}$).

$$\begin{aligned} \mu_\varphi : K[x] &\rightarrow \text{Hom}(V, V) \\ \mu_\varphi : \sum_{i=0}^n k_i x^i &\mapsto \sum_{i=0}^n k_i \varphi^i \end{aligned}$$

Die Abbildung μ_φ ist sowohl Vektorraum-Homomorphismus wie auch Ringhomomorphismus.

Bezeichnung: $K[\varphi] := \text{Bild } \mu_\varphi$; Insbesondere ist $K[\varphi]$ ein kommutativer Ring.

7.1 Elementare Eigenschaften von Ringhomomorphismen

Seien R, \tilde{R} Ringe und $\mu : R \rightarrow \tilde{R}$ ein Ringhomomorphismus.

- Ist I ein Ideal von R , so ist das Bild $I\mu$ ein Ideal von $R\mu$.
- Ist \tilde{I} ein Ideal von \tilde{R} , so ist das Urbild $\tilde{I}\mu^{-1}$ ein Ideal von R ².

Wiederholung Idealeigenschaften: I ist Ideal von R , wenn $I + I \subseteq I$ und $RI \subseteq I$ (und $IR \subseteq I$, falls R nicht kommutativ).

BEWEIS:

- Seien $a, b \in I$. Zu zeigen: $a\mu + b\mu \in I\mu$. Es gilt: $a\mu + b\mu = (a + b)\mu$. Da $(a + b) \in I$, ist $(a + b)\mu \in I\mu$.

Seien nun $a \in I, r \in R$. Zu zeigen: $(r\mu)(a\mu) \in I\mu$. Es gilt: $(r\mu)(a\mu) = (ra)\mu$. Da $ra \in I$, ist $(ra)\mu \in I\mu$ (andere Richtung analog).

¹Strukturen, die gleichzeitig Vektorraum und Ring sind, heißen *Algebra*.

² $\tilde{I}\mu^{-1} := \{a \in R \mid a\mu \in \tilde{I}\}$

- Seien $a, b \in \tilde{I}\mu^{-1}$, d.h. $\exists \tilde{a} \in \tilde{I}$ und $\tilde{b} \in \tilde{I}$ mit $a\mu = \tilde{a}$ und $b\mu = \tilde{b}$. Es gilt: $(a + b)\mu = a\mu + b\mu = \tilde{a} + \tilde{b} \in \tilde{I}$, damit ist $(a + b) \in \tilde{I}\mu^{-1}$.

Seien nun $a \in \tilde{I}\mu^{-1}, r \in R$. Es gilt: $(ra)\mu = (r\mu)(a\mu)$, weiterhin $r\mu \in \tilde{R}$ und $a\mu \in \tilde{I}$, damit $(r\mu)(a\mu) \in \tilde{I}$ (andere Richtung analog). \square

7.2 Annulatoren

Sei $\emptyset \neq U \subseteq V$. Sei $I_U := \{\alpha \in K[\varphi] \mid U\alpha = \{0\}\}$. I_U ist Ideal von $K[\varphi]$. Also ist $I_U\mu^{-1}$ Ideal von $K[x]$, das Urbild heißt *Annulatorideal* von U (bezüglich φ), geschrieben $\text{Ann}_\varphi(U)$.

Gilt $U \subseteq U' \subseteq V$, so ist $\text{Ann}_\varphi(U') \subseteq \text{Ann}_\varphi(U)$.

$K[x]$ ist *Hauptidealring*: Es existiert $m_\varphi(U) \in \text{Ann}_\varphi(U)$ mit $\text{Ann}_\varphi(U) = K[x]m_\varphi(U)$. Eindeutig ist $m_\varphi(U)$ bestimmt, wenn wir verlangen, daß es entweder 0 ist oder Leitkoeffizient 1 hat. Dann nennen wir $m_\varphi(U)$ den φ -*Annulator* von U .

Für $U = V$ heißt $m_\varphi := m_\varphi(V)$ das *Minimalpolynom* von φ .

Einfache Beispiele:

1. $V = \{0\}$; damit ist $\text{Hom}(V, V) = \{0\}$; $\text{Ann}_\varphi(V) = K[x]$; $m_\varphi = 1 \cdot x^0 = 1$; $\text{grad } m_\varphi = 0$.
2. $\text{Ann}_\varphi(V) = K[x]$; also $m_\varphi = 1$; damit $m_\varphi(\varphi) = \text{id}$, also $V = \{0\}$
Es gilt also: $\text{grad } m_\varphi = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$.
3. Sei $V \neq \{0\}$ und $\varphi = 0$; $\text{Ann}_\varphi(V) = K[x]x$; $m_\varphi = x$; $m_\varphi(\varphi) = \varphi$.
4. Sei $V \neq \{0\}$ und $\varphi = \text{id}$; d.h. $\varphi - \text{id} = 0$, also $(x - 1) \in \text{Ann}_\varphi(V)$ und $m_\varphi = x - 1$
5. Sei $V \neq \{0\}$ und $v\varphi = kv$ für ein $0 \neq v \in V$ und ein $k \in K$; die 1 ist nicht in $\text{Ann}_\varphi(v)$. Es gilt: $v\varphi - kv = 0 = v\varphi - v(k\varphi^0) = v(\varphi - k\varphi^0)$, also ist $x - k \in \text{Ann}_\varphi(v)$. Damit ist auch schon $m_\varphi(v) = x - k$.

7.3 Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

7.3.1 Existenz/Erzeugung von Annulatoren

Sei $\emptyset \neq U \subseteq V$. Dann ist $\text{Ann}_\varphi(U) \neq \{0\}$. Insbesondere ist $\text{Ann}_\varphi(V) \neq \{0\}$.

BEWEIS: Es gilt: $\text{Ann}_\varphi(V) \subseteq \text{Ann}_\varphi(U)$; es genügt also zu zeigen: $\text{Ann}_\varphi(V) \neq \{0\}$ zu zeigen.

- Ist $V = \{0\}$, dann ist $\text{Ann}_\varphi(V) = K[x] \neq \{0\}$.
- Sei $V \neq \{0\}$ und $0 \neq v \in V$, und sei $n := \dim V (\geq 1)$. Die Elemente $v\varphi^0, \dots, v\varphi^n$ ($n+1$ Stück) sind linear abhängig. Es existieren $k_0, \dots, k_n \in K$, nicht alle null, mit $\sum_{i=0}^n k_i v\varphi^i = 0$.
D.h. $v(\sum_{i=0}^n k_i \varphi^i) = 0$. Damit: $\sum_{i=0}^n k_i x^i \in \text{Ann}_\varphi(v)$.

VORAUSSETZUNG: Sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V . Eben gesehen: $\text{Ann}_\varphi(v_i) \neq \{0\}$. Seien $m_\varphi(v_i) =: m_i$ die entsprechenden Annulatoren. Sei $m := \prod_{i=1}^n m_i \neq 0$ (Nullteilerfreiheit).

BEHAUPTUNG: $m \in \text{Ann}_\varphi(V)$

BEWEIS: Es genügt zu zeigen: $v_i m(\varphi) = 0 \forall i = 1, \dots, n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} v_i m(\varphi) &= v_i \prod_{j=1}^n m_j(\varphi) \\ &= v_i m_i(\varphi) \prod_{j \neq i} m_j(\varphi) \\ &= 0 \prod_{j \neq i} m_j(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist $m \in \text{Ann}_\varphi(V)$ und somit $\text{Ann}_\varphi(V) \neq \{0\}$. □

7.3.2 Definition von Eigenwert, -vektor und -räumen

Sei $k \in K$. Dann sind äquivalent:

1. k ist Nullstelle von m_φ
2. Es existiert $0 \neq v \in V$ mit $v\varphi = kv$.

BEWEIS:

„ \Rightarrow “ k ist also Nullstelle von m_φ . Damit ist³ $m_\varphi = (x - k)h$ für ein $h \in K[x]$ mit $\text{grad } h < \text{grad } m_\varphi$. Wegen $\text{grad } h < \text{grad } m_\varphi$ gilt: $h \notin \text{Ann}_\varphi(V)$, d.h. $\exists 0 \neq w \in V$ mit $wh(\varphi) \neq 0$. Setze $v := wh(\varphi)$.

$$\begin{aligned} 0 &= w m_\varphi(\varphi) \\ &= wh(\varphi)(\varphi - k \cdot \text{id}) \\ &= v(\varphi - k \cdot \text{id}) \\ &= v\varphi - v(k \cdot \text{id}) \\ \Rightarrow v\varphi &= kv \end{aligned}$$

³offiziell 6.7/bei mir 6.11

„ \Leftarrow “ Es existiert $0 \neq v \in V$ mit $v\varphi = kv$. $m_\varphi, (x-k) \in \text{Ann}_\varphi(v)$ und $x-k = m_{\varphi,v}$ (siehe Beispiel). Damit existiert $h \in K[x]$ mit $m_\varphi = (x-k)h$ (Hauptidealeigenschaften). Damit ist k eine Nullstelle von m_φ . \square

DEFINITION:

- $k \in K$ heißt *Eigenwert* von φ , falls eine der gerade als äquivalenten bewiesenen Aussagen für k gilt.
- Ist k Eigenwert von φ , so heißt ein $v \in V$ mit $v \neq 0$ und $v\varphi = kv$ *Eigenvektor* von φ zum Eigenwert k .
- $V(k) = \{v \in V \mid v\varphi = kv\}$ heißt *Eigenraum* von φ zum Eigenwert k .

Beachte: $V(k)$ ist Unterraum von V , und es gilt: $V(k)\varphi \subseteq V(k)$ (da für $w \in V(k)$ gilt: $(w\varphi)\varphi = (kw)\varphi = k(w\varphi)$).

BEISPIELE für $V \neq \{0\}$:

- $\varphi = \text{id}$: Eigenwert ist 1, denn $v\varphi = v = 1v$; dies ist auch der einzige Eigenwert von φ . Der Eigenraum: $V(1) = V$.
- $\varphi = 0$: der einzige Eigenwert ist 0, $V(0) = V$.⁴
- $\varphi = k \cdot \text{id}$: der einzige Eigenwert ist k , $V(k) = V$.
- $\det \varphi = 0$: Eigenwert 0, Eigenraum: $V(0) = \text{Kern } \varphi \neq \{0\}$.
- Sei 0 Eigenwert von φ . Dann folgt: $\text{Kern } \varphi \neq \{0\} \Rightarrow \det \varphi = 0$.
- $K = \mathbb{C}$, Basis v_1, v_2 von V und $v_1\varphi = v_2$ sowie $v_2\varphi = -v_1$. Seien $k, k_1, k_2 \in K$ mit $(k_1v_1 + k_2v_2)\varphi = k(k_1v_1 + k_2v_2)$.

$$\begin{aligned} (k_1v_1 + k_2v_2)\varphi &= (k_1v_1)\varphi + (k_2v_2)\varphi \\ &= k_1v_2 - k_2v_1 \\ &= kk_1v_1 + kk_2v_2 \\ \Rightarrow k_1 &= kk_2 \\ \wedge -k_2 &= kk_1 \\ \Rightarrow -k_2 &= k^2k_2 \end{aligned}$$

Daraus folgt entweder $k_2 = 0$ und damit auch $k_1 = 0$, also $k_1v_1 + k_2v_2 = 0$, oder $k = \pm i$, dann ist $k_1 = \pm ik_2$.

- $V(i) = \{h(v_i - iv_2) \mid h \in K\}$
- $V(-i) = \{h(v_i + iv_2) \mid h \in K\}$

⁴„Ein Physiker würde sagen: super, klappt immer, es gibt immer nur einen Eigenwert und der Eigenraum ist immer gleich V “

7.3.3 Unabhängigkeit von Eigenvektoren, Anzahl der Eigenwerte

Seien a_1, \dots, a_n paarweise verschiedene Eigenwerte von φ und v_1, \dots, v_n entsprechende Eigenvektoren. Dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig. Insbesondere existieren höchstens $\dim V$ verschiedene Eigenwerte von φ .

BEWEIS: Angenommen, v_1 bis v_n sind linear abhängig, d.h. es existieren $k_1, \dots, k_n \in K$, nicht alle gleich null, mit $\sum_{i=1}^n k_i v_i = 0$.

Seien $k_1, \dots, k_r \in K$ ($r \leq n$) nicht alle Null mit $\sum_{i=1}^r k_i v_i = 0$ und r minimal mit dieser Eigenschaft. Damit ist $k_r \neq 0$ und $r \geq 2$.

$$\begin{aligned} 0 &= a_r \sum_{i=1}^r k_i v_i - \left(\sum_{i=1}^r k_i v_i \right) \varphi \\ &= \sum_{i=1}^r a_r k_i v_i - \left(\sum_{i=1}^r k_i a_i v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^r (a_r - a_i) k_i v_i \\ &= (a_r - a_r) k_r v_r + \sum_{i=1}^{r-1} (a_r - a_i) k_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} (a_r - a_i) k_i v_i \end{aligned}$$

Mit der Minimalität von r : $(a_r - a_i) k_i = 0$ für ein $i = 1, \dots, r - 1$; zudem $a_r - a_i \neq 0$ (da $a_r \neq a_i$), also ist $k_i = 0$ für $i = 1, \dots, r - 1$. Also ist $k_r = 0$ im Widerspruch zur Wahl der k_i . □

7.4 Direkte Summen und Diagonalisierbarkeit

7.4.1 Direkte Summe

Seien V_1, \dots, V_n Unterräume von V . Gilt

1. $V = \sum_{i=1}^n V_i$ und
2. $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$

Dann heißt V die *direkte Summe* der Unterräume V_1, \dots, V_n . In Zeichen:

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

7.4.2 Kriterien für direkte Summen

Seien V_1, \dots, V_n Unterräume von V und $V = \sum_{i=1}^n V_i$. Dann sind äquivalent:

- (a) $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$
- (b) Zu jedem $v \in V$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert genau ein $v_i \in V_i$ mit $v = \sum_{i=1}^n v_i$
- (c) Seien $0 \neq v_i \in V_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann sind die Elemente v_1, \dots, v_n linear unabhängig.
- (d) $\dim V = \sum_{i=1}^n \dim V_i$

BEWEIS:

- (a) \Rightarrow (b) Sei $v \in V$, seien $v_i, v'_i \in V_i$ und $v = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n v'_i$. Zu zeigen: $v_i = v'_i \forall i$. Es gilt:

$$V_i \ni v_i - v'_i = \sum_{i \neq j} v'_j - v_j \in \sum_{i \neq j} V_j$$

Damit ist nach Definition der direkten Summe: $v_i - v'_i \in V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$, also $v_i = v'_i$.

- (b) \Rightarrow (c) Seien $0 \neq v_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n$. Seien $k_1, \dots, k_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n k_i v_i = 0$. Zu zeigen: $k_1 = \dots = k_n = 0$. Es gilt: $k_i v_i \in V_i$. Nach Voraussetzung ist $0 \in V$ nur auf eine Weise als Kombination der Elemente aller V_i darstellbar, also $0_V = 0_{V_1} + \dots + 0_{V_n}$, damit $k_i v_i = 0$ für alle i .

- (c) \Rightarrow (d) Wähle B_i als Basis von V_i für alle $i = 1, \dots, n$. Setze $B := \bigcup_{i=1}^n B_i$. Dann ist

$$B_i \cap \bigcup_{j \neq i} B_j = \emptyset \Rightarrow |B| = \sum_{i=1}^n |B_i| = \sum_{i=1}^n \dim V_i$$

Es genügt zu zeigen: B ist Basis von V . $\langle B \rangle \geq \langle B_i \rangle$ für alle $i = 1, \dots, n$. Damit gilt: $V = \sum_{i=1}^n nV_i \leq \langle B \rangle \leq V$.

Sei $k_b \in K$, $b \in B$ und $\sum_{b \in B} k_b b = 0$. Dann ist

$$0 = \underbrace{\sum_{b \in B_1} k_b b}_{\in V_1} + \dots + \underbrace{\sum_{b \in B_n} k_b b}_{\in V_n}$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{b \in B_i} k_b = 0 \forall i$. B_i ist Basis von V_i , also linear unabhängig. Also ist $k_b = 0 \forall b \in B_i \forall i$

(d) \Rightarrow (a) Es ist zu zeigen: $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$. Es ist $V = V_i + \sum_{j \neq i} V_j$. Mit Dimensionsformel folgt:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim V_i + \dim \left(\sum_{j \neq i} V_j \right) - \dim \left(V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j \right) \\ &\leq \dim V_i + \sum_{j \neq i} \dim V_j - \dim \left(V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j \right) \\ &= \dim V - \dim \left(V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j \right) \\ \Rightarrow 0 &= \dim \left(V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j \right) \end{aligned}$$

7.4.3 Direkte Summe der Eigenräume

Seien a_1, \dots, a_n paarweise verschiedene Eigenwerte von φ . Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n V(a_i) = V(a_1) \oplus \dots \oplus V(a_n)$$

BEWEIS: Wende (7.3.3) und (7.4.2) (c) \Rightarrow (a) an.

7.4.4 Teiler, teilerfremd

$g, h \in K[x]$. Wir sagen g teilt h , falls ein $u \in K[x]$ existiert mit $h = gu$ (in Zeichen $g|h$). Seien $g, h \in K[x] \setminus K$. Dann heißen g und h teilerfremd, falls kein $u \in K[x] \setminus K$ existiert mit $u|g$ und $u|h$.

7.4.5 Kern von zwei Teilern von Polynomen auf Abbildungen

Seien $g_1, g_2 \in K[x] \setminus K$ teilerfremd und $f := g_1 g_2$. Dann gilt:

$$\text{Kern } f(\varphi) = \text{Kern } g_1(\varphi) \oplus \text{Kern } g_2(\varphi)$$

BEWEIS: Setze $W := \text{Kern } f(\varphi)$ und $W_i := \text{Kern } g_i(\varphi)$. Sei $w \in W_1 \cap W_2$. Sei $h = m_\varphi(w)$.

- Beachte: $W_i \varphi \subseteq W_i$, denn $\varphi g_i(\varphi) = g_i(\varphi) \varphi$. Insbesondere $W_i g_j(\varphi) \subseteq W_i$.

- $g_1, g_2 \in K[x] \cdot h$; es gilt: $0 = wh(\varphi)$, $h|g_1$ und $h|g_2$. Mit der Teilerfremdheit von g_1, g_2 folgt: $h \in K$. Damit: $0 = wh(\varphi) = hw$. Da $h \neq 0$ folgt: $w = 0$. Damit ist $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
- Es bleibt zu zeigen: $W = W_1 + W_2$. Doppelte Inklusion:

„ \subseteq “ Sei $v \in W$. Setze $v_1 := vg_2(\varphi)$ und $v_2 := vg_1(\varphi)$. Dann gilt:

$$v_1g_1(\varphi) = vg_2(\varphi)g_1(\varphi) = vf(\varphi) = 0$$

Damit ist $v_1 \in W_1$, genauso $v_2 \in W_2$. $g_i(\varphi) : W_j \rightarrow W_j$ ist für $i \neq j$ eine injektive lineare Abbildung, denn $\text{Kern } g_i(\varphi) \cap W_j = W_i \cap W_j = \{0\}$. Da W_j endlich dimensional ist, ist $g_i(\varphi)$ auch surjektiv (damit bijektiv).

Also existiert ein $v'_j \in W_j$ mit $v'_jg_i(\varphi) = v_j$. Sei $u := v - v'_1 - v'_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} ug_1(\varphi) &= \underbrace{vg_1(\varphi)}_{=v_2} - \underbrace{v'_1g_1(\varphi)}_{=0} - \underbrace{v'_2g_1(\varphi)}_{=v_2} = 0 \\ ug_2(\varphi) &= \underbrace{vg_2(\varphi)}_{=v_1} - \underbrace{v'_1g_2(\varphi)}_{=v_1} - \underbrace{v'_2g_2(\varphi)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt: $u \in \text{Kern } g_1(\varphi) \cap \text{Kern } g_2(\varphi) = \{0\}$, also $u = 0$. Damit ist $v = v'_1 + v'_2 \Rightarrow v \in W_1 + W_2$, also $W \subseteq W_1 + W_2$.

„ \supseteq “ $W_i f(\varphi) = W_i g_1(\varphi)g_2(\varphi) = \{0\}$, damit $W_i \subseteq W$

7.4.6 Kern von mehreren Teilern von Polynomen auf Abbildungen

Seien g_1, \dots, g_n paarweise teilerfremde Polynome aus $K[x]$ und $f = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$. Dann gilt:

$$\text{Kern } f(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Kern } g_i(\varphi)$$

BEWEIS: Induktion nach n :

- Verankerung: trivial für $n = 1$, für $n = 2$ gerade gezeigt.
- Annahme: Sei $n \geq 3$ und die Behauptung richtig für $n - 1$.
- Schluß: Setze $h_i = \prod_{j \neq i} g_j$. Nach [6.6] sind h_i und g_i teilerfremd. Dann ist $\text{Kern } f(\varphi) = \text{Kern } g_i(\varphi) \oplus \text{Kern } h_i(\varphi)$. Mit der Induktionsannahme ist $\text{Kern } h_i(\varphi) = \bigoplus_{j \neq i} \text{Kern } g_j(\varphi)$. Damit ist $\text{Kern } f(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Kern } g_i(\varphi)$.

7.4.7 Diagonalisierbarkeit

φ heißt *diagonalisierbar*, falls eine Basis B von V existiert, so daß $M(\varphi, B, B)$ eine Diagonalmatrix ist (d.h. nur in der Diagonalen stehen Koeffizienten ungleich 0).⁵ Damit gilt für $b_i \in B$: $b_i\varphi = a_{ii}b_i$. Damit ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis von Eigenvektoren von φ besitzt.

7.4.8 Diagonalisierbarkeitskriterium

φ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es paarweise verschiedene Eigenwerte a_1, \dots, a_r von φ gibt mit

$$m_\varphi = \prod_{i=1}^r (x - a_i)$$

BEWEIS:

„ \Rightarrow “ Sei φ diagonalisierbar. Dann existiert eine Basis von Eigenvektoren. Sei a_i der Eigenwert zu v_i für $i = 1, \dots, n$. Sei die Numerierung⁶ und r so gewählt, daß a_1, \dots, a_r paarweise verschieden und $\{a_1, \dots, a_r\} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Es gilt $V(a_i) = \text{Kern}(\varphi - a_i \cdot \text{id})$ wegen

$$w \in \text{Kern}(\varphi - a_i \cdot \text{id}) \Leftrightarrow w(\varphi - a_i \cdot \text{id}) = 0 \Leftrightarrow w\varphi = a_i \cdot w \Leftrightarrow w \in V(a_i)$$

Sei $g := \prod_{i=1}^r (x - a_i)$. Dann gilt (mit j so gewählt, daß v_l Eigenvektor zu a_j):

$$v_l g(\varphi) = v_l(\varphi - a_j \cdot \text{id}) \prod_{i \neq j} (\varphi - a_i \cdot \text{id}) = 0$$

Damit ist $\text{Kern } g(\varphi) = V$. Wir haben gezeigt: $g \in K[x]m_\varphi$, d.h. $m_\varphi | g$. Nach (6.7) und Definition von Eigenwert gilt auch $g | m_\varphi$. Insbesondere: $\text{grad } g = \text{grad } m_\varphi$, beide haben Leitkoeffizient 1, also $g = m_\varphi$.

Noch mal ausführlicher: $g = hm_\varphi$ und $m_\varphi = h'g$ für je ein $h, h' \in K[x]$, mit Gradgleichung: $h, h' \in K$, da beide Leitkoeffizient 1 haben: $h = h' = 1$.

„ \Leftarrow “ Sei $m_\varphi = \prod_{i=1}^r (x - a_i)$ und a_1, \dots, a_r paarweise verschieden. Beachte: $(x - a_1), \dots, (x - a_r)$ sind paarweise teilerfremd. Nach (7.4.6) ist

$$\begin{aligned} V &= \text{Kern } m_\varphi(\varphi) \\ &= \text{Kern}(\varphi - a_1 \cdot \text{id}) \oplus \dots \oplus \text{Kern}(\varphi - a_r \cdot \text{id}) \\ &= V(a_1) \oplus \dots \oplus V(a_r) \end{aligned}$$

⁵„Zweites Semester sind sie jetzt... ich ja auch.“

⁶„Wie wird heutzutage *Num(m)erierung* geschrieben? Mit zwei m ? Ach, das ist mir egal!“

Sei B_i Basis von $V(a_i)$ für $i = 1, \dots, r$, damit ist $\bigcup B_i =: B$ Menge von Eigenvektoren und $\langle B \rangle = V$. Mit (7.4.2) ist B linear unabhängig.

7.5 Das charakteristische Polynom

Sei $n := \dim V \geq 1$. Es ist $K \subseteq K[x] \subseteq K(x)$ (Körper der rationalen Funktionen)⁷. Sei B Basis von V und $A := M(\varphi, B, B)$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} x - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & x - a_{nn} \end{pmatrix} = x \cdot I_{n \times n} - A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K(x))$$

DEFINITION:

$$f_\varphi := \det(xI_{n \times n} - A) \in K(x)$$

Sei B' eine weitere Basis, dann gilt:

$$\begin{aligned} U &:= M(\text{id}, B', B) \\ U^{-1} &= M(\text{id}, B, B') \\ UU^{-1} &= I_{n \times n} \\ M(\varphi, B', B') &= U \cdot M(\varphi, B, B) \cdot U^{-1} \\ \det(xI_{n \times n} - UAU^{-1}) &= \det U(xI_{n \times n} - A)U^{-1} \\ &= \det U \cdot \det(xI_{n \times n} - A) \cdot \det U^{-1} \\ &= \det U \cdot \det U^{-1} \cdot \det(xI_{n \times n} - A) \\ &= \det I_{n \times n} \cdot \det(xI_{n \times n} - A) \\ &= 1 \cdot \det(xI_{n \times n} - A) \\ &= \det(xI_{n \times n} - A) \\ &= f_\varphi \end{aligned}$$

Damit ist f_φ unabhängig von der Basis, f_φ heißt das *charakteristische Polynom*.

⁷„Wenn sie das erstmal haben, haben sie mehr zum Spielen - wie im Sandkasten!“

Sei $xI_{n \times n} - A =: B = (b_{ij})_{n \times n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \left(\prod_{i=1}^n b_{ij} \sigma \right) \\
 &= \prod_{i=1}^n b_{ii} + \sum_{1 \neq \sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \left(\prod_{i=1}^n b_{ij} \sigma \right) \\
 &= \underbrace{\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})}_{\operatorname{grad} n} + \underbrace{\sum_{1 \neq \sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \left(\prod_{i=1}^n b_{ij} \sigma \right)}_{\operatorname{grad} < n}
 \end{aligned}$$

Beachte: $b_{ij} = -a_{ij}$ für $i \neq j$ und $b_{ii} = x - a_{ii}$. Damit ist $\det B \in K[x]$, $\operatorname{grad} f_\varphi = n$, Leitkoeffizient 1!

Beispiel:

1.

$$\begin{aligned}
 A := M(\varphi, B, B) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 xI_{n \times n} - A &= \begin{pmatrix} x & 0 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} \\
 \det xI_{n \times n} - A &= (x-1) \cdot \det \begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{pmatrix} \\
 &= (x-1) \cdot x \cdot \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} \\
 &= (x-1) \cdot x \cdot (x^2 - 2x + 1) \\
 &= x \cdot (x-1)^3
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} 4 & -6 & -15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \\ xI_{n \times n} - A &= \begin{pmatrix} x-4 & 6 & 15 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 2 & x+4 \end{pmatrix} \\ \det xI_{n \times n} - A &= (x-1) \cdot \det \begin{pmatrix} x-4 & 15 \\ -1 & x+4 \end{pmatrix} \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

7.5.1 Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Sei $a \in K$. a ist genau dann Eigenwert von φ , wenn a Nullstelle des charakteristischen Polynoms f_φ .

BEWEIS: Sei $k \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_\varphi(k) &= \det(k \cdot I_{n \times n} - M(\varphi, B, B)) \\ &= \det(M(k \cdot \text{id}, B, B) - M(\varphi, B, B)) \\ &= \det(k \cdot \text{id} - \varphi) \\ f_\varphi(a) &= 0 = \det(a \cdot \text{id} - \varphi) \end{aligned}$$

Damit ist $(a \cdot \text{id} - \varphi)$ nicht invertierbar, damit ist $\text{Kern}(a \cdot \text{id} - \varphi) \neq \{0\}$, also existiert von $0 \neq v \in V$ mit $v(a \cdot \text{id} - \varphi) = 0$. Damit existiert ein $0 \neq v \in V$ mit $va = v\varphi$, also ist a Eigenwert. Alle Schritte des Beweises sind äquivalent.

7.5.2 Char. Polynom im invarianten Unter- und Faktorraum

Sei $U \leq V$ Unterraum. U heißt φ -invariant, falls $U\varphi \subseteq U$.

Sei U ein φ -invarianter Unterraum. Sei $\varphi|_U$ die Einschränkung von φ auf U . Dann ist $\varphi|_{V/U}$ die auf V/U induzierte lineare Abbildung:

$$\varphi|_{V/U} : v + U \mapsto v\varphi + U$$

Es gilt:

$$f_\varphi = f_{\varphi|_U} \cdot f_{\varphi|_{V/U}} \quad \text{und} \quad m_{\varphi|_U} \cdot m_{\varphi|_{V/U}} \in K[x]m_\varphi$$

BEWEIS: Für $U = \{0\}$ offensichtlich. Sei $\dim U =: r \geq 1$.

Sei $B := \{b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis von V (mit $n := \dim V$), wobei

$B_1 := \{b_1, \dots, b_r\}$ eine Basis von U ist. Sei $\overline{B_1} = (B \setminus B_1) + U = \{b_{r-1} + U, \dots, b_n + U\}$.

$$\begin{aligned}
M(\varphi, B, B) &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}(K) \\
A &= M(\varphi|_U, B_1, B_1) \in \mathcal{M}_{r \times r}(K) \\
D &= M(\varphi|_{V/U}, \overline{B_1}, \overline{B_1}) \in \mathcal{M}_{n-r \times n-r}(K) \\
xI_{n \times n} - M(\varphi, B, B) &= \begin{pmatrix} A' & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix} \\
f_{\varphi|_U} &= \det(\underbrace{xI_{r \times r} - A}_{A'}) \\
f_{\varphi|_{V/U}} &= \det(\underbrace{xI_{n-r \times n-r} - D}_{D'}) \\
\text{Entwicklungssatz } f_\varphi &= \det A' \cdot \det D' \\
&= f_{\varphi|_U} \cdot f_{\varphi|_{V/U}} \\
(m_{\varphi|_U} \cdot m_{\varphi|_{V/U}})(\varphi) &= m_{\varphi|_{V/U}}(\varphi) \cdot m_{\varphi|_U}(\varphi) \\
\underbrace{vm_{\varphi|_{V/U}}(\varphi)}_{\in U} m_{\varphi|_U}(\varphi) &= 0
\end{aligned}$$

7.5.3 Matrix mit Minimalpolynom = char. Pol

Sei $\dim V \geq 1$, $r := \text{grad } m_\varphi$ und $m_\varphi = \sum_{i=0}^r a_i x^i$. Es existiert ein $v \in V$ mit $V = \langle v\varphi^i | i \in \mathbb{N} \rangle$. Dann ist $\dim V = r$ und $B = \{v\varphi^0, \dots, v\varphi^{r-1}\}$ eine Basis von V und es gilt:

$$M(\varphi, B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

BEWEIS: Beachte $r \geq 1$. Es gilt: $m_{\varphi,v}(v) = \varphi^k m_{\varphi,v}(\varphi)$, d.h.

$$0 = \underbrace{vm_{\varphi,v}(\varphi)}_0 \varphi^k = (v\varphi^k) m_{\varphi,v}(\varphi)$$

Damit ist $m_{\varphi,v} \in K[x]m_\varphi$, also $m_\varphi | m_{\varphi,v}$. Andererseits: $m_\varphi \in K[x]m_{\varphi,v}$, d.h. $m_{\varphi,v} | m_\varphi$. Damit gilt: $m_\varphi = m_{\varphi,v}$

Als nächstes zeigen wir: $v\varphi^0, \dots, v\varphi^{r-1}$ sind linear unabhängig. Seien $w = \sum_{i=0}^{r-1} k_i(v\varphi^i)$ eine Linearkombination mit $k_i \in K$. Sei $g := \sum_{i=0}^{r-1} k_i x^i$. Dann ist $w = vg(\varphi)$.

Genau dann ist $w = 0$, wenn $g \in \text{Ann}_\varphi(v) = K[x]m_{\varphi,v} = K[x]m_\varphi$. Damit ist $g = 0$ oder $r = \text{grad } m_\varphi \leq \text{grad } g = r - 1$, der zweite Fall kann nicht sein. Damit ist $g = 0$, also $k_0 = \dots = k_{r-1} = 0$, also $v\varphi^0, \dots, v\varphi^{r-1}$ linear unabhängig.

Angenommen, $V > W := \langle v\varphi^0, \dots, v\varphi^{r-1} \rangle$. Es existiert ein $v\varphi^k \in V \setminus W$, sei zusätzlich k minimal mit dieser Eigenschaft. Es ist $k \geq r$. Das Element $v\varphi^{r-1}$ liegt wegen der Minimalität von k in W . Damit existiert eine Linearkombination:

$$\begin{aligned} v\varphi^{k-1} &= \sum_{i=0}^{r-1} h_i v\varphi^i \\ (v\varphi^{k-1})\varphi &= \left(\sum_{i=0}^{r-1} h_i v\varphi^i \right) \varphi \\ &= \sum_{i=1}^r h_{i-1} v\varphi^i \\ &= \underbrace{\dots}_{\in W} + h_{r-1} v\varphi^r \\ \Rightarrow \underbrace{h_{r-1}}_{\neq 0} v\varphi^r &\notin W \\ \Rightarrow v\varphi^r &\notin W \end{aligned}$$

Da k minimal ist, ist $k = r$.

$$\begin{aligned} 0 &= vm_\varphi(\varphi) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} a_i v\varphi^i + \underbrace{a_r}_{=1} v\varphi^r \\ v\varphi^r &= - \sum_{i=0}^{r-1} a_i v\varphi^i \in W \end{aligned}$$

Damit ist $v\varphi^r \in W$, Widerspruch, also ist es eine Basis.

Wir haben gezeigt: $B = \{v\varphi^0, \dots, v\varphi^{r-1}\}$ ist eine Basis von V . Die Matrix ist

direkt zu berechnen. Das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}
 f_\varphi &= \det(xI_{r \times t} - M(\varphi, B, B)) \\
 &= \det \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x + a_{r-1} \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{(-1)^{r+1} a_0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 \end{pmatrix}}_{a_0} + \underbrace{(-1)^{r+2} a_1 \cdot \det(\dots)}_{a_1 x^1} \dots \\
 &= a_0 + a_1 x + \dots + a_{r-1} x^{r-1} + x^r
 \end{aligned}$$

7.5.4 Satz von Cayley-Hamilton

Das charakteristische Polynom liegt im von Minimalpolynom erzeugten Hauptideal des Polynomrings

$$f_\varphi \in K[x]m_\varphi, \text{ d.h. } f_\varphi(\varphi) = 0$$

BEWEIS: Induktion nach $\dim V$:

- Induktionsanfang: $\dim V = 1$, dann $V = \langle v \rangle$, zudem $v\varphi = kv$ für ein $k \in K$, d.h. k ist Eigenwert von φ ; $f_\varphi = x - k = m_\varphi$
- Induktionsannahme: Sei $\dim V \geq 2$ und die Behauptung richtig für alle Vektorräume der Dimension kleiner $\dim V$.
- Induktionsschluß: Es existiert $v \in V$ mit $V = \langle v\varphi^i | i \in \mathbb{N} \rangle$, so folgt $m_\varphi = f_\varphi$ aus (7.5.3). Also können wir annehmen: Für $0 \neq v \in V$ ist $U := \langle v\varphi^i | i \in \mathbb{N} \rangle$ ein echter Unterraum von V , der φ -invariant ist. Da U ein echter Unterraum ist, gilt nach Induktionsannahme: $F_{\varphi|_U} \in K[x]m_{\varphi|_U}$. Dimensionssatz: $\dim V/U < \dim V$. Wieder mit Induktionsannahme: $f_{\varphi_{V/U}} \in K[x]m_{\varphi_{V/U}}$.

$$f_\varphi = f_{\varphi|_U} \cdot f_{\varphi_{V/U}} \in K[x] \cdot \underbrace{m_{\varphi|_U} \cdot m_{\varphi_{V/U}}}_{\in K[x]m_\varphi} \subseteq K[x] \cdot m_\varphi$$

7.6 Bemerkung über unendlichdimensionale Vektorräume

Z.B. $V := K[x]$ ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum über K .

BEWEIS: Annahme, V sei endlich. Sei f_1, \dots, f_n endliche Basis, dann hat ein Polynom $g = \sum_{i=1}^n k_i f_i$ den Grad $\leq \max\{\text{grad } f_i\}$, damit kann $g \cdot x$ nicht existieren.

Sei $g \notin K$ fest gewählt aus $K[x]$. Dann gilt: $(f_1 + f_2)g = f_1g + f_2g$ und $(kf_1)g = k(f_1g)$. Beachte daher die lineare Abbildung $\varphi_g : f \mapsto fg$ (Rechtsmultiplikation). Was ist m_{φ_g} ? Suche Annulatorideal $\text{Ann}_{\varphi_g}(V) = \{f \in K[x] \mid f(\varphi_g) = 0\}$

Sei $f = \sum_{i=0}^n k_i x^i$, $h \in K[x]$, dann ist

$$\begin{aligned} hf(\varphi_g) &= h \left(\sum_{i=0}^n k_i \varphi_g^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n k_i h \varphi_g^i \\ &= \sum_{i=0}^n k_i h g^i \end{aligned}$$

Daraus folgt: $f = 0$, also $\text{Ann}_{\varphi_g}(V) = \{0\}$, also $m_{\varphi} = 0$.

Daraus ergibt sich folgende allgemeingültige Definition (also für endlich- und unendlichdimensionale Vektorräume) für Eigenwerte: k heißt Eigenwert von φ falls $v \neq 0 \in V$ existiert mit $v\varphi = kv$.

8 Normalform linearer Abbildungen

Sei K Körper, V endlichdimensionaler Vektorraum und $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$.

8.1 invariant, zyklisch, unzerlegbar

Sei U ein φ -invarianter Unterraum von V . U heißt φ -zyklisch, falls $v \in U$ mit $U = \langle v\varphi^i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$. Zudem heißt U φ -unzerlegbar⁸, falls U nicht direkte Summe von echten (d.h. $\neq U$) φ -invarianten Unterräumen ist.

Sei U ein φ -zyklischer Unterraum, W ein φ -invarianter Unterraum von U . Dann folgt: $U/W = \langle v\varphi^i + W \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ ist $\varphi_{U/W}$ -zyklisch.

⁸„Hm, ich seh' schon, das ist gar kein Gegenbeispiel - OK, dann ist es halt ein Beispiel.“

Sei $\psi \in \text{Hom}(V, V)$ mit φ vertauschbar, d.h. $\varphi\psi = \psi\varphi$ (z.B. wenn $\psi = g(\varphi)$ für ein $k \in K[x]$). Dann ist

$$\begin{aligned} U\psi &= \langle v\varphi^i\psi | i \in \mathbb{N} \rangle \\ &= \langle (v\psi)\varphi^i | i \in \mathbb{N} \rangle \end{aligned}$$

Damit ist $U\psi$ wieder φ -zyklisch. Beispiele:

- Der Vektorraum $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (kanonische Basis $\{e_1, e_2\}$) ist für $e_1\varphi = e_1$ und $e_2\varphi = e_1 + e_2$ φ -unzerlegbar und φ -zyklisch.
- Der Vektorraum $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ (kanonische Basis $\{e_1, e_2\}$) ist für $e_1\varphi = e_1$ und $e_2\varphi = -e_2$ nicht φ -unzerlegbar, aber φ -zyklisch.

8.2 Zerlegung in φ -zyklische Unterräume

8.2.1 direkte Summe φ -unzerlegbarer Unterräume

V ist direkte Summe φ -unzerlegbarer Unterräume.

BEWEIS: Induktion nach $\dim V$. Ist V φ -unzerlegbar, so gilt die Behauptung. Sei V nicht φ -unzerlegbar. D.h. $V = A_1 \oplus A_2$ für zwei φ -invariante echte Unterräume A_1, A_2 . Also: $\dim A_i < \dim V$. Nach Induktion ist $A_1 = B_1 \oplus \dots \oplus B_s$ und $A_2 = C_1 \oplus \dots \oplus C_t$, wobei C_i und B_i φ -unzerlegbar sind. Damit ist $V = (B_1 \oplus \dots \oplus B_s) \oplus (C_1 \oplus \dots \oplus C_t)$, Klammern können nach (7.4.2) weggelassen werden, denn $\dim V \stackrel{(7.4.2)}{=} \dim A_1 + \dim A_2 \stackrel{(7.4.2)}{=} \sum_{i=1}^s \dim B_i + \sum_{i=1}^t \dim C_i$

8.2.2 Minimalpolynom unzerlegbarer Vektorräume

Sei $V \neq \{0\}$ ein φ -unzerlegbarer Vektorraum. Dann ist $m_\varphi = f^e$ für ein irreduzibles Polynom von $f \in K[x]$ und ein $e \in \mathbb{N}$.

BEWEIS: folgt aus (6.6) und (7.4.6): $m_\varphi = \prod_{i=1}^r f_i^{e_i}$, zudem f_1, \dots, f_r sind paarweise teilerfremde irreduzible Polynome. Angenommen, $r > 1$ und $h = \prod_{i=2}^r f_i^{e_i}$. Dann ist $g = f_1^{e_1}$, d.h. $m_\varphi = gh$ und g, h sind teilerfremd. Mit (7.4.6) ist $V = \text{Kern } g(\varphi) \oplus \text{Kern } h(\varphi)$, das ist ein Widerspruch zur φ -Unzerlegbarkeit.

8.2.3 Bild/Kern von Faktoren des Minimalpolynoms

Sei V φ -zyklisch und $m_\varphi = gh$ mit $g, h \in K[x]$. Dann ist $\text{Bild } g(\varphi) = \text{Kern } h(\varphi)$ und $f_{\varphi|_{\text{Kern } h(\varphi)}} = ch$ für ein $c \in K$. Außerdem hat jeder Eigenraum von φ Dimension 1.

BEWEIS: Es existiert $v \in V$ mit $V = \langle v\varphi^i | i \in \mathbb{N} \rangle$. Sei $U := \text{Bild } g(\varphi)$. Die Räume V/U und U sind wieder φ -zyklisch. Mit (7.5.3) angewandt auf $V, U, V/U$ gilt:

1. $m_\varphi = f_\varphi, m_{\varphi|U} = f_{\varphi|U}, m_{\varphi_{V/U}} = f_{\varphi_{V/U}}$
2. Mit (7.5.2) $gh = m_\varphi = f_\varphi = f_{\varphi|U}f_{\varphi_{V/U}} = m_{\varphi|U}m_{\varphi_{V/U}}$
- 3.

$$\begin{aligned}
V/Ug(\varphi_{V/U}) &= \left\{ \underbrace{vg(\varphi)}_{\in U} + U \mid v \in V \right\} \\
&= \{0\} \\
Uh(\varphi) &= \{vg(\varphi)h(\varphi) \mid v \in V\} \\
&= \{vm_\varphi(\varphi) \mid v \in V\} \\
&= \{0\} \\
\Rightarrow g &\in K[x]m_{\varphi_{V/U}} \\
\wedge h &\in K[x]m_{\varphi|U} \\
\Rightarrow \text{grad } g &\geq \text{grad } m_{\varphi_{V/U}} \\
\wedge \text{grad } h &\geq \text{grad } m_{\varphi|U} \\
\text{grad } gh &= \text{grad } g + \text{grad } h \\
&= \text{grad } m_\varphi \\
&= \text{grad } m_{\varphi_{V/U}} + \text{grad } m_{\varphi|U} \\
\Rightarrow \text{grad } g &= \text{grad } m_{\varphi_{V/U}} \\
\wedge \text{grad } h &= \text{grad } m_{\varphi|U}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $h = cm_{\varphi|U}$ für ein $c \in K$. Es ist

$$\text{grad } h = \text{grad } m_{\varphi|U} \stackrel{(7.5.3)}{=} \dim U$$

Genauso ist (mit g und h vertauscht)

$$\text{grad } g = \dim \text{Bild } h(\varphi)$$

$$\begin{aligned}
\dim V &\stackrel{(7.5.3)}{=} \text{grad } m_\varphi \\
&= \text{grad } g + \text{grad } h \\
&= \dim \text{Bild } h(\varphi) + \dim \text{Kern } h(\varphi) \\
\Rightarrow \text{grad } h &= \dim \text{Kern } h(\varphi) \\
&= \dim U
\end{aligned}$$

Aus (3) folgt: $U \leq \text{Kern } h(\varphi)$, also $U = \text{Kern } h(\varphi)$.

Zu zeigen bleibt: Jeder Eigenraum von φ hat die Dimension 1. Sei a Eigenwert von φ (damit ist $V \neq \{0\}$). Dann ist $m_\varphi = (x - a)h'$ für ein $h' \in K[x]$. Setze $g' = (x - a)$. Dann ist wie eben gesehen:

$$\begin{aligned}
 \text{Kern } h'(\varphi) &= \text{Bild } g'(\varphi) \\
 \text{und } \dim \text{Kern } h'(\varphi) &= \dim \text{Bild } g'(\varphi) \\
 &= \text{grad } f_{\varphi|_{\text{Kern } h'(\varphi)}} - \text{grad } h' \\
 &= \text{grad } m_\varphi - 1 \\
 &\stackrel{(7.4.5)}{=} \dim V - 1 \\
 \dim V &= \dim \text{Kern } g'(\varphi) + \underbrace{\dim \text{Bild } g'(\varphi)}_{=\dim V - 1} \\
 \Rightarrow \dim \text{Kern } g'(\varphi) &= 1 \\
 \text{Kern } g'(\varphi) &= \text{Kern}(\varphi - a \cdot \text{id}) \\
 &= \{v \in V \mid v(\varphi - a \cdot \text{id}) = 0\} \\
 &= V(a) \\
 \Rightarrow \dim V(a) &= 1
 \end{aligned}$$

8.2.4 invarianter Unterraum \oplus zyklischer Unterraum

Sei $m_\varphi = f^e$, $f \in K[x]$ irreduzibel und $e \in \mathbb{N}$, und sei U ein φ -zyklischer Unterraum maximaler Dimension von V . Dann existiert ein φ -invarianter Unterraum $W \leq V$ mit $V = U \oplus W$.

BEWEIS: Induktion nach $\dim V$:

- Induktionsanfang: $\dim V \leq 1$ offensichtlich, da V selbst φ -zyklisch ist.
- Induktionsannahme: $\dim V \geq 2$ und die Behauptung ist richtig für alle Vektorräume der Dimension kleiner $\dim V$.
- Sei \tilde{U} ein φ -invarianter Unterraum. Dann ist $m_\varphi \in K[x]m_{\varphi|_{\tilde{U}}}$ und $m_\varphi \in K[x]m_{\varphi|_{V/\tilde{U}}}$. Mit (6.6) folgt:

$$m_{\varphi|_{\tilde{U}}} = f^{e'} \text{ und } m_{\varphi|_{V/\tilde{U}}} = f^{e''}$$

Das heißt \tilde{U} und V/\tilde{U} erfüllen die Voraussetzungen bezüglich $\varphi|_{\tilde{U}}$ bzw. $\varphi_{V/\tilde{U}}$. Sei nun \tilde{U} auch φ -zyklisch. Mit (7.4.5) folgt:

$$\begin{aligned}
 \dim \tilde{U} &= \text{grad } m_{\varphi|_{\tilde{U}}} = e' \text{ grad } f \\
 \dim \tilde{U} \text{ maximal} &\Leftrightarrow e' \text{ maximal}
 \end{aligned}$$

Sei nun zusätzlich e' maximal gewählt und $U := \tilde{U}$. Für alle φ -zyklischen Unterräume \hat{U} gilt:

$$\hat{U}f^{e'} = \hat{U}f^{e'} = \{0\} \Rightarrow f^{e'} \in K[x]m_\varphi = K[x]f^e \Rightarrow e = e' \Rightarrow m_\varphi = m_{\varphi|_U}$$

Betrachte zwei Fälle:

1. V/U ist nicht φ -unzerlegbar. Es existieren φ -invariante⁹ $A_1, A_2 \leq V$ mit $U \subseteq A_1 \cap A_2$, $A_1 \neq V \neq A_2$ und $V/U = A_1/U \oplus A_2/U$. Insbesondere gilt: $\dim A_i < \dim V$ und $m_{\varphi, A_i} = m_\varphi$ für $i = 1, 2$, denn $m_{\varphi, A_i} \in K[x]m_{\varphi|_U} = K[x]m_\varphi$ und $m_\varphi \in K[x]m_{\varphi|_{A_i}}$.

Mit Induktion gilt: $A_i = U \oplus A_i^*$, wobei A_1^* φ -invariant ist für $i = 1, 2$. Setze $W := A_1^* + A_2^*$. Es ist

$$U + W = U + A_1^* + A_2^* + U = A_1 + A_2 = V$$

Es bleibt zu zeigen: $U \cap W = \{0\}$. Dann ist¹⁰

$$A_i/U = (A_i + U^*)/U \simeq A_i^*/(A_i^* \cap U) \simeq A_i^*$$

$$\begin{aligned} \dim V - \dim U + \dim U \cap W &= \dim W \\ &\leq \dim A_1^* + \dim A_2^* \\ &= \dim A_1/U + \dim A_2/U \\ &= \dim V/U \\ &= \dim V - \dim U \\ \Rightarrow U \cap W &= \{0\} \end{aligned}$$

2. V/U ist φ -unzerlegbar. Induktion nach $\dim V$ sagt uns: Ist U_1 ein $\varphi_{V/U}$ -zyklischer Unterraum maximaler Dimension, so existiert ein $\varphi_{V/U}$ -invarianter Unterraum W_1 mit $V/U = U_1 \oplus W_1$.

Mit der Unzerlegbarkeit folgt: $W_1 = \{0\}$ und V/U ist φ -zyklisch. D.h. es existiert $v \in V$ mit $V/U = \langle v\varphi^i + U \mid i \in \mathbb{N} \rangle$. Damit ist $\bar{m} := m_{\varphi_{V/U}}$ ein Teiler von m_φ . Also ist $\bar{m} = f^k$ für ein $k \leq e$. Sei

⁹„Ich habe Ihnen ja schon immer gesagt - Sie sollen mein Script lesen und nicht mir zuhören!“

¹⁰„Deutschland - das Land der Dichter und Denker! Stellen Sie doch mal die Sinnfrage!“

$$r = e - k.$$

$$\begin{aligned}
vf^k(\varphi)f^r(\varphi) &= f^{k+r}(\varphi) = vf^e(\varphi) \\
&= vm_\varphi(\varphi) = 0 \\
vf^k(\varphi) &= v\bar{m}(\varphi) \in \text{Kern } f^r(\varphi) \\
(v+U)\bar{m}(\varphi_{V/U}) &= 0+U \\
&= v\bar{m}(\varphi) + U \\
U \cap \text{Kern } f^r(\varphi) &= \text{Kern } f^r(\varphi|_U) \\
&= \text{Bild } f^k(\varphi|_U) \\
&= Uf^k(\varphi)
\end{aligned}$$

Also existiert $u_v \in U$ mit $u_v f^k(\varphi) = v f^k(\varphi)$. Setze $v' = v - u_v$ und $W := \langle v' \varphi^i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$. Dann ist

$$v' f^k(\varphi) = (v - u_v) f^k(\varphi) = 0$$

Mit (7.5.3) folgt:

$$\dim W \leq \text{grad } f^k = \text{grad } \bar{m} = \dim V/U$$

Dann ist $v\varphi^i \in W + U = V$. Mit Dimensionssätzen folgt:

$$\begin{aligned}
\dim V + \dim W - \dim U \cup W &= \dim V \\
&= \dim V/U + \dim U \\
&\geq \dim W + \dim U \\
\Rightarrow U \cap W &= \{0\} \\
\Rightarrow V &= U \oplus W
\end{aligned}$$

8.2.5 unzerlegbar \Rightarrow zyklisch

Ist V φ -unzerlegbar, so ist V φ -zyklisch.

BEWEIS: Mit (8.2.2): $m_\varphi = f^e$, f irreduzibel; also nach (8.2.4): V ist φ -zyklisch.

8.2.6 Bedingung für zyklisch \Rightarrow unzerlegbar

Sei $m_\varphi = f^e$, $f \in K[x]$ irreduzibel. Genau dann ist V φ -zyklisch, wenn V φ -unzerlegbar ist.

BEWEIS: Wege (8.2.5) bleibt nur eine Richtung zu zeigen. Angenommen,

$V = V_1 \oplus V_2$ und V_1, V_2 verschiedene φ -invariable Unterräume ungleich $\{0\}$.
 Sei $m_{\varphi|_{V_i}} = f^{e_i}$ mit $e_i \leq e$. Sei o.B.d.A $e_1 \leq e_2 \leq e$.

$$\begin{aligned} Vf^{e_2}(\varphi) &= V_1f^{e_2}(\varphi) + V_2f^{e_2}(\varphi) \\ &= \{0\} \\ \Rightarrow e_2 &= e \end{aligned}$$

Mit (7.5.3) und (7.5.4) gilt:

$$\text{grad } m_{\varphi|_{V_2}} \leq \text{grad } f_{\varphi|_{V_2}} = \dim V_2 \leq \dim V = \text{grad } m_{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{grad } m_{\varphi|_{V_2}} &\leq \text{grad } f_{\varphi|_{V_2}} \\ &= \dim V_2 \leq \dim V \\ &= \text{grad } m_{\varphi} \\ &= \text{grad } m_{\varphi|_{V_2}} \\ \Rightarrow \dim V &= \dim V_2 \\ \Rightarrow V &= \{0\} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von V_1 .

8.2.7 direkte Summe zyklischer und unzerlegbarer Unterräume

V ist direkte Summe φ -zyklischer φ -unzerlegbarer Unterräume.

BEWEIS: Induktion nach $\dim V$:

- Verankerung: für $\dim V \leq 1$
- Annahme: Sei $\dim V \geq 2$, und die Behauptung richtig für alle Vektorräume kleinerer Dimension.
- Schluß: Laut (6.6) gilt: $m_{\varphi} = f_1^{e_1} \cdot \dots \cdot f_r^{e_r}$, wobei f_i paarweise teilerfremde irreduzible Polynome aus $K[x]$ sind.

Mit (7.4.6). $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, wobei $W_i := \text{Kern } f_i^{e_i}(\varphi)$.

- Angenommen, $r > 1$. Mit (7.4.2) gilt: $\dim V = \dim W_1 + \dots + \dim W_r$, also $\dim W_i < \dim V$. W_i ist φ -invariant, mit der Induktionsannahme gilt: $W_i = W_{i1} \oplus \dots \oplus W_{in_i}$

Dann sind W_{ij} jeweils $\varphi|_{W_i}$ -zyklisch und $\varphi|_{W_i}$ -unzerlegbar, also auch φ -zyklisch und φ -unzerlegbar. Dann ist

$$V = W_{11} \oplus \dots \oplus W_{1n_1} \oplus \dots \oplus W_{r1} \oplus \dots \oplus W_{rn_r}$$

- Sei nun $r = 1$ Sei U ein φ -zyklischer Unterraum maximaler Dimension, insbesondere $U \neq \{0\}$. Mit (8.2.4) existiert $W \leq V$ φ -invariant mit $V = U \oplus W$, es ist $\dim W < \dim V$, mit Induktionsannahme: $W = W_2 \oplus \dots \oplus W_r$, damit ist W_i φ -zyklisch und φ -unzerlegbar.

$$V = U \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_r$$

ist die gesuchte Zerlegung wegen (8.2.6) angewandt auf U (beachte $m_{\varphi|_U} | m_\varphi$)

8.2.8 Zerlegungssatz

Sei $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ und $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ zwei Zerlegungen in φ -zyklische, φ -unzerlegbarer Unterräume. Dann ist $r = s$ und es existiert $\pi \in S_r$, so daß $V_i \simeq W_{i\pi}$ und eine invertierbare lineare Abbildung (Isomorphismus) $\varrho \in \text{Hom}(V, V)$ existiert mit

$$V_i \varrho = W_{i\pi} \text{ und } \varrho \varphi = \varphi \varrho$$

BEWEIS: siehe Script

8.3 Die allgemeine Normalform

VORAUSSETZUNG: Sei φ lineare Abbildung auf endlichdimensionalem Vektorraum V .

8.3.1 Satz über die allgemeine Normalform

Es existieren linear unabhängige Teilmengen B_1, \dots, B_r von V , so daß für $B := \bigcup_{i=1}^r B_i$ gilt:

1. $\langle B_i \rangle$ ist φ -zyklisch und φ -unzerlegbar
2. $V = \langle B_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle B_r \rangle$
3. B ist Basis von V und

$$M(\varphi, B, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

$$A_i = M(\varphi|_{\langle B_i \rangle}, B_i, B_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n_i-1} \end{pmatrix}$$

$$m_{\varphi|_{\langle B_i \rangle}} = \sum_{i=0}^{n_i-1} a_i x^i$$

BEWEIS: Nach (8.2.7) existiert eine Zerlegung $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ mit V_i φ -zyklisch und φ -unzerlegbar. Nach (7.5.3) existiert eine Basis B_i von V_i mit $M(\varphi|_{\langle B_i \rangle}, B_i, B_i) = A_i$ wie in (3). Nach (7.4.2) ist B eine Basis von V mit der gewünschten Eigenschaft.

8.3.2 Beispiele

1. Sei $\dim V = 4$, B Basis,

$$A := M(\varphi, B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: „die“ allgemeine Normalform von φ . Das charakteristische Polynom berechnet sich als $f_\varphi = \det(xI - A) = (x - 2)^4$. Das Minimalpolynom folgt daraus (nach ein bißchen Matrizenrechnung) als $m_\varphi = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Denkbar sind dann die Matrizen

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (2) & 0 \\ 0 & (2) \end{pmatrix} \right)$$

Da das Minimalpolynom Potenz eines irreduziblen Polynoms ist, muß es einen Eigenraum geben, der das gleiche Minimalpolynom hat (und damit $\dim \geq 2$).

$$\dim \text{Bild}(\varphi - 2\text{id}) = \text{rg } C = 1 \Rightarrow \dim \text{Kern}(\varphi - 2\text{id}) = 3 = \dim V(2)$$

2. kommt noch

8.4 Die Jordansche Normalform

In diesem Abschnitt sei $\dim V \geq 1$ und sei K ein *algebraisch abgeschlossener Körper*, d.h. jedes irreduzible Polynom aus $K[x]$ hat Grad 1, äquivalent dazu: jedes Polynom vom Grad ≥ 1 in $K[x]$ hat eine Nullstelle in K . Insbesondere ist \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen (Hauptsatz der Algebra).

8.4.1 Satz über die Jordansche Normalform

Sei K algebraisch abgeschlossen¹¹. Dann existieren linear unabhängige Teilmengen B_i mit $i = 1, \dots, r$, so daß für $B = \bigcup_{i=1}^r B_i$ gilt:

1. $\langle B_i \rangle$ ist φ -zyklisch und unzerlegbar für $i = 1, \dots, r$
2. $V = \langle B_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle B_r \rangle$
- 3.

$$M(\varphi, B, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

wobei

$$A_i = M(\varphi|_{\langle B_i \rangle}, B_i, B_i) = \begin{pmatrix} c_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_i & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_i \end{pmatrix}$$

und $\{c_1, \dots, c_r\}$ die Menge der Eigenwerte von φ ist.

BEWEIS: Wie in (8.3.1) zerlegt man V in „eine“ direkte Summe von φ -unzerlegbaren, φ -zyklischen Unterräumen. Also $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$. Es bleibt zu zeigen: in V_i existiert eine Basis B_i , so daß $A_i = M(\varphi|_{V_i}, B_i, B_i)$ die gewünschte Gestalt hat.

Sei $m_i := m_{\varphi|_{V_i}}$, K algebraisch abgeschlossen, V_i φ -unzerlegbar. Mit (8.2.2) folgt: $m_i = (x - c_i)^{n_i}$. Mit (7.5.3) gilt: Es existiere $v \in V_i$, so daß $v\varphi^0, \dots, v\varphi^{n_i-1}$ Basis von V_i ist und $\dim V_i = n_i$.

Setze $\psi := \varphi - c_i \cdot \text{id}$ und $v_i := v\psi^i$ für $0 \leq i \leq n_i - 1$. Dann ist V_i ψ -invariant, damit: $\underbrace{\langle v_0, \dots, v_{n_i-1} \rangle}_{\varphi\text{-invariant}} \subseteq V_i$, daraus folgt: $V_i \leq \langle v_0, \dots, v_{n_i-1} \rangle \leq V_i$, also ist

$\{v_0, \dots, v_{n_i-1}\}$ eine Basis von V_i .

Betrachte $A_i := M(\varphi|_{V_i}, B_i, B_i)$. Für $0 \leq j \leq n_i - 2$ gilt: $v_j\varphi = v\psi^j\varphi =$

¹¹Nicht unbedingt notwendig, notwendig ist nur: Das Minimalpolynom zerfällt in Linearfaktoren.

$v\psi^j(\psi + c_i \cdot \text{id}) = v\psi^{j+1} + c_i v\psi^j$. Damit steht in der Matrix A_i an Position (j, j) gerade c_i und 1 an $(j, j + 1)$. Noch zu betrachten:

$$v_{n-i-1}\varphi = v\psi^{n_i-1}(\psi + c_i \cdot \text{id}) = v\psi^{n_i} + \underbrace{c_i v\psi^{n_i-1}}_{=v_{n_i-1}}$$

und $v\psi^{n_i} = (\varphi - c_i \cdot \text{id})^{n_i} = v m_i(\varphi) = 0$.

8.4.2 Beispiele

1. Sei $\dim V = 4$, B Basis,

$$M(\varphi, B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Damit ist $m_\varphi = f_\varphi = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (x - 1)^4$, damit ist die Jordansche Normalform:

$$M(\varphi, B', B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (wird noch korrigiert)

9 Alpha-Bilinearform

Sei im Folgenden K ein Körper.

9.1 Körperautomorphismen

Eine Abbildung α heißt Körperautomorphismus (von K), falls sie bijektiv von K nach K ist und gilt:

$$(k_1 + k_2)\alpha = k_1\alpha + k_2\alpha \text{ und } (k_1 k_2)\alpha = k_1\alpha k_2\alpha \quad \forall k_1, k_2 \in K$$

BEISPIEL:

1. Sei $K = \mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ (Körper der komplexen Zahlen). Sei

$$\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } a + ib \mapsto a - ib$$

Dann ist α ein Körperautomorphismus von \mathbb{C} , zudem $\alpha^2 = \text{id} \neq \alpha$. α heißt die *Komplexkonjugation*.

2. Sei K Körper mit $\text{char } K = 2$. Dann ist

$$\alpha : K \rightarrow K \text{ mit } k \mapsto k^2$$

ein Körperautomorphismus: Für alle $k_1, k_2 \in K$ gilt

$$(k_1 + k_2)\alpha = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + \underbrace{2k_1k_2}_{=0} + k_2^2 = k_1\alpha + k_2\alpha$$

$$(k_1k_2)\alpha = (k_1k_2)^2 = k_1^2k_2^2 = k_1\alpha k_2\alpha$$

9.2 Eigenschaften der Bilinearform

Sei in diesem Abschnitt α Automorphismus von K und V ein Vektorraum über K .

DEFINITION: Eine Abbildung $f : V \times V \rightarrow K$ heißt α -Bilinearform, falls gilt:

1. $f(v_1, v_2 + v_3) = f(v_1, v_2) + f(v_1, v_3)$
 $f(v_1 + v_2, v_3) = f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3)$
2. $f(kv_1, v_2) = kf(v_1, v_2)$
 $f(v_1, kv_2) = (k\alpha) \cdot f(v_1, v_2)$

Ist $\alpha = \text{id}$, so heißt f Bilinearform.

BEISPIEL:

1. $\alpha = \text{id}$, $V = \mathbb{R}^n$. Sei

$$f((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) := \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Dann ist f Bilinearform und heißt das *Skalarprodukt* auf \mathbb{R}^n .

2. α Komplexkonjugation, $V = \mathbb{C}^n$. Sei

$$f((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) := \sum_{i=1}^n a_i (b_i \alpha)$$

Dann ist f α -Bilinearform und heißt das *Skalarprodukt* auf \mathbb{C}^n .

3. $\alpha = \text{id}$, $V = \mathbb{R}^4$. Sei $0 \neq c \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Sei

$$f((a_1, \dots, a_4), (b_1, \dots, b_4)) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - c^2 a_4 b_4$$

Dann ist f Bilinearform und (V, f) ist der *Minkowski-Raum* (wichtig z.B. in der Relativitätstheorie)

- Eigenschaften beider Skalarmultiplikationen, jedoch nicht im Minkowski-Raum:

$$f(v, v) \geq 0 \text{ und } f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

9.2.1 Gram'sche Matrix

Im Folgenden sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und f eine α -Bilinearform auf V . Sei zudem $n := \dim V$ und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Definiere die *Gram'sche Matrix*:

$$G_B(f) := (f(v_i, v_j))_{n \times n} = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & \cdots & f(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(v_n, v_1) & \cdots & f(v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

Sei $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n h_i w_i$, dann

$$f(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(v_i, v_j) (k_i (h_j \alpha))$$

9.2.2 reguläre Bilinearform

DEFINITION: f (und V bezüglich f) heißt *regulär* (oder *nicht ausgeartet*), falls gilt:

$$f(v, w) = 0 \forall w \in V \Rightarrow v = 0$$

SATZ: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) f ist regulär
- (b) $\det G_b(f) \neq 0$
- (c) $f(w, v) = 0 \forall w \in V \Rightarrow v = 0$

BEWEIS:

(a) \Rightarrow (b) Betrachte das LGS (*) der Gestalt $xG_B(f) = 0$. Wir wissen: $(0, \dots, 0)$ ist einzige Lösung von (*) in K^n genau dann, wenn $\det G_B(f) \neq 0 \Leftrightarrow \det G_B(f)^t \neq 0$. Sei $(k_1, \dots, k_n) \in K^n$ Lösung von (*). Damit folgt:

$$\sum_{i=1}^n k_i f(v_i, v_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Für $v := \sum_{i=1}^n k_i v_i$ gilt somit: $f(v, v_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$. Sei $w := \sum_{t=1}^n h_t v_t \in V$. Dann ist

$$f(v, w) = \sum_{t=1}^n h_t \underbrace{\alpha f(v, v_t)}_{=0} = 0$$

Da f regulär ist, ist $v = 0$, damit folgt: $k_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$; damit ist $\det G_B(f) \neq 0$.

(b) \Rightarrow (a) Aus $\det G_B(f) \neq 0$ folgt: $(0, \dots, 0)$ ist einzige Lösung von (*). Sei $v := \sum_{i=1}^n k_i v_i$. Dann ist

$$f(v, v_j) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n k_i f(v_i, v_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Damit folgt: (k_1, \dots, k_n) ist Lösung von (*), damit ist $(k_1, \dots, k_n) = (0, \dots, 0)$, also $v = 0$, damit ist f regulär.

(b) \Leftrightarrow (c) Betrachte das LGS (***) der Gestalt $xG_B(f)^t = 0$. Wir wissen: $(0, \dots, 0)$ ist einzige Lösung von (***) in K^n genau dann, wenn $\det G_B(f) \neq 0 \Leftrightarrow \det G_B(f)^t \neq 0$. Sei $(k_1, \dots, k_n) \in K^n$ Lösung von (***). Äquivalent:

$$\sum_{i=1}^n k_i f(v_j, v_i) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Für $v := \sum_{i=1}^n k_i \alpha^{-1} v_i$ gilt somit: (k_1, \dots, k_n) ist Lösung von (***) genau dann, wenn $f(w, v) = 0$ für alle $w \in V$ (beachte $\sum_{i=1}^n k_i f(v_j, v_i) = f(v_j, v)$). Nun folgt Äquivalenz wie in „(a) \Leftrightarrow (b)“ wenn man berücksichtigt: $k_1 \alpha^{-1} = \dots = k_n \alpha^{-1} = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$.

9.2.3 Gram'sche Matrizen verschiedener Basen

Seien B, B' Basen von V und sei $(a_{ij}) := A := M(\text{id}, B', B)$. Dann gilt:

$$G_{B'}(f) = A G_B(f) (A\alpha)^t \quad \text{mit } A\alpha := (a_{ij}\alpha)$$

Insbesondere gilt für die Determinanten:

$$\det G_{B'}(f) = \det G_B(f) \cdot \det A \cdot \det A\alpha$$

BEWEIS: Sei $n := \dim V$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$, sei $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad \forall i \\ f(w_i, w_j) &= f\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} v_k, \sum_{t=1}^n a_{jt} v_t\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ik} a_{jt} \alpha f(v_k, v_t) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ik} f(v_k, v_t) a_{jt} \alpha \\ &= ij\text{-Element der Matrix } A \cdot G_B(t) \cdot (A\alpha)^t \end{aligned}$$

9.2.4 Vektorraum der α -Bilinearformen

Sei α fest vorgegeben und $B_\alpha(V)$ die Menge der α -Bilinearformen auf V . Durch

$$(f + g)(v, w) := f(v, w) + g(v, w) \text{ und } (kf)(v, w) := kf(v, w)$$

für $f, g \in B_\alpha(V)$ und $k \in K$ sowie $v, w \in V$ wird $B_\alpha(V)$ zu einem Vektorraum.

Auch $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$ ist ein Vektorraum über K . Sei B eine Basis von V . Dann ist die folgende Abbildung ein Vektorraumisomorphismus¹²:

$$\mu : B_\alpha(V) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(K) \mu : f \mapsto G_B(f)$$

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$. Dann existiert $f \in B_\alpha(V)$ mit $f\mu = A$, d.h. $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ wobei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist¹³.

9.3 Der duale Vektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Dann ist $\text{Hom}(V, K)$ ein Vektorraum, der zu V *duale Vektorraum*. Im folgenden setzen wir $V^* := \text{Hom}(V, K)$. Die Elemente von V^* heißen *Linearfunktionen* (oder lineare Funktionale).

¹²„Das sagt ihnen genauer: Es gibt Bilinearformen wie Sand am Meer, und V ist das Meer...“

¹³„Wir hätten aufhören können mit der Linearen Algebra, viele hätten sich gefreut...“

9.3.1 Isomorphiesatz

Sei V endlichdimensional und B die Basis von V . Für $b \in B$ sei $b^* \in V^*$ definiert mittels:

$$b'b^* := \begin{cases} 0 & \text{falls } b' \neq b \\ 1 & \text{falls } b' = b \end{cases} \quad b' \in B$$

Dann ist $B^* := \{b^* \mid b \in B\}$ eine Basis von V^* und es gilt: $V \simeq V^*$.

BEWEIS: Offensichtlich ist die Abbildung $B \rightarrow B^*$ mit $b \mapsto b^*$ bijektiv: die Surjektivität ergibt sich aus der Definition von B^* , die Injektivität: $b^* = b'^*$ (mit $b, b' \in B$). Damit: $bb'^* = bb^* = 1 \Rightarrow b = b'$. Es genügt zu zeigen: B^* ist Basis.

Sei $\beta \in V^*$, definiere $k_b := b\beta \in K$. Setze $\beta' = \sum_{b \in B} k_b b^*$. Dann ist für $e \in B$:

$$\begin{aligned} e\beta' &= \sum_{b \in B} k_b (eb^*) \\ &= k_e (ee^*) = k_e \\ e\beta &= k_e \end{aligned}$$

Damit ist $\beta = \beta'$ und $\beta \in \langle B^* \rangle$, d.h. B^* ist Erzeugendensystem von V^* .

Sei $k_{b^*} \in K$ und $\sum_{b^* \in B^*} k_{b^*} b^* = 0$. Sei $e \in B$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= e \cdot 0 \\ &= e \cdot \sum_{b^* \in B^*} k_{b^*} b^* \\ &= \sum_{b^* \in B^*} k_{b^*} eb^* \\ &= k_{e^*} \\ \Rightarrow k_{e^*} &= 0 \quad \forall e \in B \\ \Rightarrow k_{e^*} &= 0 \quad \forall e^* \in B^* \end{aligned}$$

Die Basis B^* heißt die zu B *duale Basis*.

BEISPIEL:

1. Sei $V = K[x]$ und $B = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis von V . Sei B^* wie in (9.3.1) definiert.

Es gilt $\langle B^* \rangle \neq V^*$. Sei $\delta \in V^*$ mit $x^i \delta = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Angenommen, $\delta \in \langle B^* \rangle$. Es existiert eine endliche Teilmenge $B_0^* \subseteq B^*$ und $k_{b^*} \in K$ für $b^* \in B_0^*$ mit $\delta = \sum_{b^* \in B_0^*} k_{b^*} b^*$.

Es existiert x^i mit $x^i \notin B_0^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} 1 &= x^i \delta \\ &= \sum_{b^* \in B_0^*} k_{b^*} \underbrace{x^i b^*}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Widerspruch!

9.3.2 Dimensionssatz

Bezeichnung: Sei $U \leq V$, $H \leq V^*$. Definiere

$$\begin{aligned} U^\perp &:= \{\beta \in V^* \mid u\beta = 0 \forall u \in U\} \\ H^\top &:= \{v \in V \mid v\beta = 0 \forall \beta \in H\} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist U^\perp ein UR von V^* und H^\top UR von V . Betrachte $U^{\perp\top\perp\dots}$

SATZ: Sei V endlichdimensional und U ein Unterraum von V . Dann gilt:

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

BEWEIS: Sei B_0 Basis von U , B Basis von V mit $B_0 \subseteq B$. Sei $B^* = \{b^* \mid b \in B\}$ wie in (9.3.1).

Zur Erinnerung: $b^* \in V^*$, $b'b^* = \begin{cases} 0 & \text{falls } b' = b \\ 1 & \text{falls } b' \in B \setminus \{b\} \end{cases}$.

Sei $B_0^* = \{b^* \mid b \in B_0\}$; $B_1 = B^* \setminus B_0^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim V^* = |B^*| \\ &= |B_0^*| + |B_1^*| \\ &= |B_0| + |B_1^*| \\ &= \dim U + |B_1^*| \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen: $|B_1^*| = \dim U^\perp$. Sei $W := |B_1^*| \subseteq V^*$, es ist $\dim W = |B_1^*|$. Sei $b_0 \in B_0$ und $b_1^* \in B_1^*$. Dann ist

$$b_0 b_1^* = \begin{cases} 1 & \text{falls } b_0 \neq b_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Angenommen, $b_0 = b_1$, dann ist $b_0^* = b_1^* \in B_0^* \cap B_1^*$, Widerspruch, da $B_0^* \cap B_1^* = \emptyset$.

Wir haben gezeigt: $b_i^* \in \langle B_0 \rangle^\perp = U^\perp$, damit $W \leq U^\perp$.

Sei $\beta \in U^\perp$. Seien $k_{b^*} \in K$ mit $\beta = \sum_{b^* \in B^*} k_{b^*} b^*$. Für $b_0 \in B_0 \subseteq U$ ist

$$\begin{aligned}
 0 &= b_0 \beta \\
 &= b_0 \sum_{b^* \in B^*} k_{b^*} b^* \\
 &= \sum_{b^* \in B^*} k_{b^*} b_0 b^* \\
 &= \sum_{b^* \in B^*} k_{b^*} b_0 b^* \\
 &= k_{b_0^*} \\
 \Rightarrow \beta &= \sum_{b^* \in B_1^*} k_{b^*} b^* \in W \\
 \Rightarrow U^\perp &\leq W \\
 \Rightarrow W &= U^\perp \\
 \Rightarrow |B_1^*| &= \dim U^\perp
 \end{aligned}$$

9.3.3 der $(\text{Raum}^*)^*$

Sei V endlichdimensional. Dann ist

$$\varphi : V \rightarrow (V^*)^* \text{ mit } \beta(v\varphi) := v\beta \quad \forall v \in V, \beta \in V^*$$

ein Isomorphismus, insbesondere gilt $H^\top \simeq H^\perp$ für alle $H \leq V^*$.

BEWEIS: Seien $v, w \in V$, $k \in K$, $\beta \in V^*$.

$$\begin{aligned}
 \beta(v+w)\varphi &= (v+w)\varphi \\
 &= v\beta + w\beta \\
 &= \beta(v\varphi) + \beta(w\varphi) \\
 &= \beta(v\varphi + w\varphi) \\
 \beta(kv)\varphi &= (kv)\beta \\
 &= k(v\beta) \\
 &= k(\beta(v\varphi)) \\
 &= \beta(k(v\varphi))
 \end{aligned}$$

Sei $v \in V$ und $v\varphi = 0$. Dann ist $\beta(v\varphi) = v\beta = 0$ für alle $\beta \in V^*$. Aus (9.3.1) folgt $v = 0$, sonst existiert $v^* \in V^*$ mit $vv^* = 1 = v^*(v\varphi) = 0$. Damit ist φ injektive lineare Abbildung von V in $(V^*)^*$. Mit (9.3.1) ist

$\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^*$, also ist φ bijektiv.

Sei $H \leq V^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} H^\top &= \{v \in V \mid v\beta = 0 \forall \beta \in H\} \\ &= \{v \in V \mid \beta(v\varphi) = 0 \forall \beta \in H\} \\ &= H^\perp \varphi^{-1} \\ \Rightarrow H^\top &\simeq H^\perp \end{aligned}$$

9.3.4 Dualitätssatz

Sei V endlichdimensional. Dann gilt:

1. $(U^\perp)^\top = U$ und $(H^\top)^\perp = H$ für alle Unterräume $U \leq V$ und $H \leq V^*$
2. $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$ und $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ für alle Unterräume $U_1, U_2 \leq V$
3. $(H_1 \cap H_2)^\top = H_1^\top + H_2^\top$ und $(H_1 + H_2)^\top = H_1^\top \cap H_2^\top$ für alle Unterräume $H_1, H_2 \leq V^*$

BEWEIS:

1. Offensichtlich gilt $U \leq (U^\perp)^\top$. Es genügt, $\dim U = \dim(U^\perp)^\top$ zu zeigen.

$$\begin{aligned} \dim V &\stackrel{(9.3.2)}{=} \dim U + \dim U^\perp \\ &\stackrel{(9.3.1)}{=} \dim V^* \\ &\stackrel{(9.3.2)}{=} \dim U^\perp + \dim \underbrace{(U^\perp)^\perp}_{\leq V^{**}} \\ \Rightarrow \dim U &= \dim(U^\perp)^\perp \\ &\stackrel{(9.3.3)}{=} \dim(U^\perp)^\top \end{aligned}$$

2. Offensichtlich gilt: $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ und $U_1^\perp + U_2^\perp \leq (U_1 \cap U_2)^\perp$.
Zu zeigen bleibt: $\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim(U_1 \cap U_2)^\perp$

$$\begin{aligned} \dim(U_1^\perp + U_2^\perp) &\stackrel{[2.2.11]}{=} \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim \underbrace{(U_1^\perp \cap U_2^\perp)}_{=(U_1+U_2)^\perp} \\ &\stackrel{(9.3.2)}{=} 2 \cdot \dim V - \dim U_1 - \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2)^\perp \\ &\stackrel{(9.3.2)}{=} \dim V - \dim U_1 - \dim U_2 + \dim(U_1 + U_2) \\ &\stackrel{[2.2.11]}{=} \dim V - \dim(U_1 \cap U_2) \\ &\stackrel{(9.3.2)}{=} \dim(U_1 \cap U_2)^\perp \end{aligned}$$

3. analog

9.3.5 Abbildungen ϱ_w und ${}_w\varrho$

Sei V endlichdimensional, f α -Bilinearform auf V . Für $w \in V$ definiere:

$$\varrho_w : V \rightarrow K \text{ mit } \varrho_w : v \mapsto f(v, w)$$

$${}_w\varrho : V \rightarrow K \text{ mit } {}_w\varrho : v \mapsto f(w, v)\alpha^{-1}$$

Dann gilt: Für alle $w \in V$ sind ϱ_w und ${}_w\varrho$ Elemente aus V^* .

BEWEIS: Einfaches Nachrechnen der Linearitätseigenschaften:

$$\begin{aligned} (v + u)\varrho_w &= f(v + u, w) \\ &= f(v, w) + f(u, w) \\ &= v\varrho_w + u\varrho_w \\ (kv)\varrho_w &= f(kv, w) \\ &= kf(v, w) \\ &= kf(v\varrho_w) \\ (kv) {}_w\varrho &= f(w, kv)\alpha^{-1} \\ &= ((k\alpha) \cdot f(w, v))\alpha^{-1} \\ &= (k\alpha)\alpha^{-1}(f(w, v)\alpha^{-1}) \\ &= k({}_w\varrho) \end{aligned}$$

9.3.6 Abbildung $V \rightarrow V^*$

Seien $\varphi, \varphi' : V \rightarrow V^*$ mit $w\varphi = \varrho_w$ bzw. $w\varphi' = {}_w\varrho$ sowie $K := \{w \in V \mid w\varphi = 0\}$ und $K' := \{w \in V \mid w\varphi' = 0\}$. Dann gilt:

1. K und K' sind Unterräume von V
2. Ist U ein Unterraum von V mit $U \cap K = \{0\}$, so erhält $\varphi|_U$ die lineare Unabhängigkeit von Elementen von U .
3. Aussage b gilt entsprechend für φ' und K' .
4. Ist f regulär, so sind φ und φ' bijektiv. Ist zusätzlich $\alpha = \text{id}$, so sind φ und φ' Isomorphismen.

BEWEIS:

1. Einfaches Nachrechnen

2. Seien v_1, \dots, v_n linear unabhängig in U . Setze $\beta_i := v_i\varphi$. Seien $k_1, \dots, k_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n k_i\beta_i = 0$.

Es gilt für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned}
 0 &= v \cdot 0_{V^*} \\
 &= v \cdot \sum_{i=1}^n k_i\beta_i \\
 &= \sum_{i=1}^n k_i(v\beta_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n k_i f(v, v_i) \\
 &= f\left(v, \sum_{i=1}^n k_i\alpha^{-1}v_i\right) \\
 \Rightarrow f(v, w) &= 0 \quad \forall v \in V
 \end{aligned}$$

Damit ist $\varrho_w = 0 \in V^*$, zudem $w\varphi = \varrho_w \Rightarrow w \in U \cap K = \{0\}$, damit folgt:

$$w = 0 = \sum_{i=1}^n k_i\alpha^{-1}v_i$$

Daraus folgt $k_1\alpha^{-1} = \dots = k_n\alpha^{-1} = 0$, nach Multiplikation mit α : β_1, \dots, β_n sind linear unabhängig.

3. analog

4. Seien v_1, \dots, v_n Basis von V und $\beta_i := v_i\varphi$. Wie eben gezeigt folgt: β_1, \dots, β_n sind linear unabhängig in V^* . Mit (9.3.1) gilt: $\dim V = \dim V^*$. Damit ist β_1, \dots, β_n eine Basis von V^* .

Sei $\beta \in V^*$. Dann existieren $h_1, \dots, h_n \in K$ mit $\beta = \sum_{i=1}^n h_i\beta_i$. Es ist

$$\begin{aligned}
 v\beta &= \sum h_i v\beta_i \\
 &= \sum h_i f(v, v_i) \\
 &= f\left(v, \sum h_i\alpha^{-1}v_i\right) \\
 \Rightarrow \beta &= \sum h_i\alpha^{-1}v_i
 \end{aligned}$$

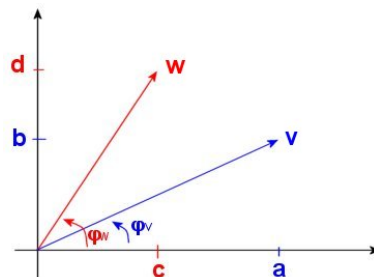
und φ ist surjektiv. Seien $w, w' \in V$ mit $w\varphi = w'\varphi$. Dann folgt: $f(v, w) = v(w\varphi) = v(w'\varphi) = f(v, w') \quad \forall v \in V$, damit folgt: $f(v, w) - f(v, w') = 0 = f(v, w - w') \quad \forall v \in V$. Da f regulär ist, ist $w - w' = 0$.

9.4 Orthosymmetrische Alpha-Bilinearform

9.4.1 Definitionen

In diesem Abschnitt ist V ein Vektorraum über K und f eine α -Bilinearform auf V .

- f heißt *orthosymmetrisch*, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $f(v, w) = 0 \Leftrightarrow f(w, v) = 0$.
- Sei f orthosymmetrisch, $v, w \in V$. Dann heißt v *orthogonal* zu w (oder: v *steht senkrecht* auf w), falls $f(v, w) = 0$; wir schreiben $v \perp w$, falls $f(v, w) = 0$.
- Für $A, B \subseteq V$ ist A orthogonal zu B , falls $a \perp b$ für alle $a \in A, b \in B$ (und damit $A \perp B$).
- Definiere weiter $A^\perp := \{v \in V \mid v \perp a \forall a \in A\}$
- Das *Radikal* von V ist definiert als: $\text{rad } V := V^\perp$
- V ist regulär genau dann, wenn $\text{rad } V = \{0\}$.
- Für einen Unterraum $U \leq V$ gilt: U heißt *regulär*, falls $U \cap U^\perp = \{0\}$.
- U ist regulär genau dann, wenn $f|_{U \times U}$ regulär ist.
- Seien V_1, \dots, V_n Unterräume von V und $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$. Gilt $V_i \leq V_j^\perp \forall i \neq j$, so schreiben wir $V = V_1 \perp \dots \perp V_n$ und nennen es *orthogonale Summe* (oder *orthogonale Zerlegung*)¹⁴
- Sei B eine Basis von V . B heißt *Orthogonalbasis* von V (bezüglich f), falls $f(b, b') = 0 \forall b, b' \in B$ mit $b \neq b'$.
- Die Basis heißt *Orthonormalbasis*, falls zusätzlich $f(b, b) = 1$ für alle $b \in B$.
- Beispiel:



¹⁴d.h. spezielle direkte Summe, wobei alle Summanden aufeinander senkrecht stehen

Im R^2 , f das Skalarprodukt¹⁵; $v = (a, b)$ und $w = (c, d)$; Länge von v : $|v| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{f(v, v)}$. Zudem:

$$\cos \varphi_v = \frac{a}{|v|} \quad \cos \varphi_w = \frac{c}{|w|} \quad \sin \varphi_v = \frac{b}{|v|} \quad \sin \varphi_w = \frac{d}{|w|}$$

$$\begin{aligned} f(v, w) &= ac + bd \\ &= |v| \cos \varphi_v \cdot |w| \cdot \cos \varphi_w + |v| \sin \varphi_v \cdot |w| \cdot \sin \varphi_w \\ &= |v| |w| (\cos \varphi_v \cos \varphi_w + \sin \varphi_v \sin \varphi_w) \\ &= |v| |w| \cos(\varphi_w - \varphi_v) \end{aligned}$$

Wann ist $f(v, w) = 0$ für $v \neq 0$ und $w \neq 0$? Wenn $\cos(\varphi_w - \varphi_v) = 0 \Leftrightarrow \varphi_w - \varphi_v = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ gilt.

Im folgenden sei f eine orthosymmetrische α -Bilinearform auf V .

9.4.2 Senkrechträume sind Unterräume („Jippie!!!“)

Ist $A \subseteq V$, so ist A^\perp ein Unterraum.

BEWEIS: Seien $v, w \in A^\perp$, $k \in K$. Es gilt: $f(u, v) = 0 \forall u \in A$, damit folgt:

$$f(u, kv) = k\alpha f(u, v) = 0 \forall u \in V \Rightarrow kv \in A^\perp$$

$$\text{und } f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w) = 0 + 0 = 0 \forall u \in V \Rightarrow v + w \in A^\perp$$

9.4.3 Dimensionssatz

Sei V endlichdimensional und U Unterraum von V mit $U \cap \text{rad } V = \{0\}$. Dann gilt:

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp$$

Nach (9.3.2) genügt zu zeigen:

$$\dim U^{\perp(9.3)} = \dim U^{\perp(9.4)}$$

Sei U_* das in (9.3) definierte U^\perp . Sei $U_* = \{B \in V^* \mid U_\beta = 0\}$. Mit (9.3.5): Zu $v \in V$ existiert $f_v \in V^*$ mit $wf_v := f(w, v)$.

Es ist $\text{rad } V = \{v \in V \mid f_v = 0\}$. Wähle Basis B von U , definiere $H := \langle f_b \mid b \in B \rangle \leq V^*$. Es gilt nach Voraussetzung: $U \cap \text{rad } V = \{0\}$

Mit (9.3.6) folgt: Die Abbildung $u \mapsto f_u$ erhält lineare Unabhängigkeit, damit

¹⁵„Es gibt Vektoren der Länge null, die nicht null sind. Das ist halt Ihr Problem.“

sind $f_b, b \in B$ linear unabhängig und damit ist $f_b, b \in B$ Basis von H .

Damit ist $\dim U = \dim H$. Es gilt¹⁶:

$$\begin{aligned} \dim V &\stackrel{(9.3.2)}{=} \dim U + \dim U_* \\ \dim V &\stackrel{(9.3.1)}{=} \dim V^* \\ &= \dim H + \dim H^{\perp} \stackrel{(9.3)}{=} \\ &\stackrel{(9.3.3)}{=} \dim H + \dim H^\top \\ &= \dim U + \dim H^\top \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $\dim H^\top = \dim U^\perp$, es gilt sogar: $H^\top = U^\perp$, denn:

$$\begin{aligned} H^\top &= \{v \in V \mid v\beta = 0 \forall b \in H\} \\ &= \{v \in V \mid v f_b = 0 \forall b \in B\} \\ &= \{v \in V \mid f(v, b) = 0 \forall b \in B\} \\ &= \{v \in V \mid f(v, b) = 0 \forall b \in B\} \\ &= \{v \in V \mid f(v, u) = 0 \forall u \in U\} \\ &= U^\perp \end{aligned}$$

9.4.4 der $(\text{Raum}^\perp)^\perp$

Sei V endlichdimensional und U ein Unterraum von V . Dann gilt:

1. Ist V regulär, so ist $U^{\perp\perp} = U$
2. Ist U regulär, so ist $V = U \perp U^\perp$

BEWEIS:

1. offensichtlich: $U \leq U^{\perp\perp}$, zu zeigen bleibt: $\dim U = \dim U^{\perp\perp}$. Nach (9.4.3) ist

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim U + \dim U^\perp \\ &= \dim U^\perp + \dim U^{\perp\perp} \\ \Rightarrow \dim U &= \dim U^{\perp\perp} \end{aligned}$$

2. U regulär heißt: $U \cup U^\perp = \{0\}$. Damit ist $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$. Nach (7.4.2) ist $\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp$.

Da U regulär ist, ist $U \cap \text{rad } V = \{0\}$. Mit (9.4.3) ist $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$, also ist

$$V = U + U^\perp = U \oplus U^\perp = U \perp U^\perp$$

¹⁶„Wir wären fertig, wenn wir zeugen könnten...“

9.4.5 Klassen von Bilinearformen

1. Sei $\alpha = \text{id}$, f heißt *symmetrisch*, falls $f(v, w) = f(w, v) \forall v, w \in V$.
 f heißt *schief-symmetrisch*, falls $f(v, w) = -f(w, v) \forall v, w \in V$. Das
 Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist eine symmetrische Bilinearform.

Offensichtlich gilt für $G_B(f)$: $G_B(f) = G_B(f)^t$, falls f symmetrisch¹⁷,
 und $G_B(f) = -G_B(f)$, falls f schief-symmetrisch¹⁸.

2. Sei $\alpha = \text{id}$. f heißt *symplektisch*, falls $f(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Beispiel:
 $V = \mathbb{R}^4$, B kanonische Basis,

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & f(k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4, k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + k_4e_4) \\ = & k_1k_1 \underbrace{f(e_1, e_1)}_0 + k_1k_2 \underbrace{f(e_1, e_2)}_1 + k_1k_3 \underbrace{f(e_1, e_3)}_0 + k_1k_4 \underbrace{f(e_1, e_4)}_0 + \dots \\ = & k_1k_2 \underbrace{f(e_1, e_2)}_1 + k_1k_2 \underbrace{f(e_2, e_1)}_{-1} + k_3k_4 \underbrace{f(e_3, e_4)}_1 + k_3k_4 \underbrace{f(e_4, e_3)}_{-1} \\ = & 0_{\text{töfftöff}} \end{aligned}$$

\Rightarrow Sei f symplektisch. Für $v, w \in V$ gilt:

$$0 = f(v + w, v + w) = \underbrace{f(v, v)}_0 + f(v, w) + f(w, v) + \underbrace{f(w, w)}_0$$

Damit folgt:

$$f(v, w) = -f(w, v)$$

Ist $\text{char } K \neq 2$ und f schief-symmetrisch, so ist f symplektisch.

3. Ist $\alpha = \text{id}$, $\text{char } K \neq 2$ und f symmetrisch, so heißt f *orthogonal*.
4. Ist $\alpha^2 = \text{id} \neq \alpha$ und $f(v, w) = f(w, v)\alpha$, so heißt f *unitär* (oder
hermitesch) (Beispiel: Das Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n)

¹⁷ „... ob Sie lineare Abbildungen lieben oder ob Sie Matrizen lieben... Mathematiker lieben Abbildungen, Nicht-Mathematiker lieben Matrizen...“

¹⁸ Analogien auch zu (schief)symmetrischen Matrizen etc.

9.4.6 Automorphismus und inverses Element

Sei α ein Automorphismus von K und $\alpha^2 = \text{id} \neq \alpha$, und sei $0 \neq a \in K$. Genau dann ist $a(a\alpha) = 1$, wenn ein $b \in k$ existiert mit $a = b(b^{-1}\alpha)$.

BEWEIS:

„ \Leftarrow “ Sei $a = b(b^{-1}\alpha)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a\alpha &= b(b^{-1}\alpha)\alpha \\ &= b\alpha(b^{-1}\alpha)\alpha \\ &= b\alpha b^{-1}\alpha^2 \\ &= b\alpha b^{-1} \\ a(a\alpha) &= b(b^{-1}\alpha)(b\alpha)b^{-1} \\ &= (b^{-1}\alpha)(b\alpha) \\ &= (b\alpha)^{-1}(b\alpha) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$b^{-1}\alpha = (b\alpha)^{-1}$$

„ \Rightarrow “ Für $c \in K$ setze $b(c) := c + a(c\alpha)$. Dann ist

$$\begin{aligned} b(c)\alpha &= (c + a(c\alpha))\alpha \\ &= c\alpha + a\alpha(c\alpha^2) \\ &= c\alpha + a^{-1}c \\ &= a^{-1}(a(c\alpha) + c) \\ &= a^{-1}b(c) \end{aligned}$$

Angenommen, $b(c) \neq 0$. Dann:

$$\begin{aligned} a &= b(c)(b(c)\alpha)^{-1} \\ &= b(c)((b(c)^{-1}\alpha)) \end{aligned}$$

Es genügt also, $c \in K$ zu finden mit $b(c) \neq 0$.

- Ist $a \neq -1$, dann ist $b(1) = 1 + a \neq 0$.
- Ist $a = -1$, dann ist $b(c) = c - c\alpha \neq 0$ für alle $c \neq c\alpha$, wenn $\alpha \neq \text{id}$ existiert so ein c .

9.4.7 Äquivalenz zwischen Bilinearformen

Seien f_1, f_2 zwei α -Bilinearformen auf V . Wir sagen: f_1 ist *äquivalent* zu f_2 , falls $a \in K \setminus \{0\}$ existiert mit $f_1 = af_2$, d.h.

$$f_1(v, w) = af_2(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

9.4.8 Klassifikationssatz für orthosym. Alpha-Bilinearf.

Sei V endlichdimensional und regulär bezüglich f und $\dim V \geq 2$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

1. $\alpha = \text{id}$ und f ist symmetrisch oder schiefssymmetrisch
2. $\alpha^2 = \text{id} \neq \alpha$ und f ist äquivalent zu einer unitären Form

BEWEIS: Sei $n := \dim V$ und seien φ und φ' wie in (9.3.6) (also $v \mapsto \varrho_v$ oder $v\varrho$). Wähle $0 \neq v_0 \in V$. Setze $\beta := v_0\varphi, \beta' := v_0\varphi'$, d.h.

$$w\beta = f(w, v_0) \text{ und } w\beta' = f(v_0, w)\alpha^{-1} \quad \forall w \in V$$

f orthosymmetrisch, Kern $\beta = \text{Kern } \beta' =: W$. Mit Dimensionssatz folgt: $\dim V = \dim W + \dim \text{Bild } \beta$, da V regulär ist, gilt: $\text{Bild } \beta = K$, damit ist $\dim W = n - 1$.

Sei $v_1 \in V \setminus W$. Dann ist $V = W \oplus \langle v_1 \rangle$. Setze $a(v_0) := v_1\beta(v_1\beta')^{-1}$ und $\mu := a(v_0)\beta'$. Für alle $k \in K$ und $w \in W$ ist dann

$$\begin{aligned} (kv_1 + w)\mu &= a(v_0)(kv_1 + w)\beta' \\ &= a(v_0)(kv_1\beta' + 0) \\ &= (v_1\beta) \cdot (v_1\beta')^{-1} \cdot k \cdot (v_1\beta') \\ &= k \cdot (v_1\beta) \\ &= (kv_1)\beta \\ (kv_1 + w)\beta &= (kv_1)\beta + 0 \\ &= (kv_1)\beta \\ \Rightarrow \beta &= \mu \end{aligned}$$

Wir zeigen: $a(v_0) = a(v'_0) \quad \forall v'_0 \in V \setminus \{0\}$. Sei $v'_0 \in V \setminus \{0\}$.

- Sei zunächst v_0, v'_0 linear unabhängig. Insbesondere $v_0 + v'_0 \neq 0$. Für

alle $w \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(w, v_0 + v'_0) &= a(v_0 + v'_0)f(v_0 + v'_0, w)\alpha^{-1} \\
&= f(a(v_0 + v'_0)\alpha(v_0 + v'_0), w)\alpha^{-1} \\
f(w, v_0 + v'_0) &= f(w, v_0) + f(w, v'_0) \\
&= a(v_0)f(v_0, w)\alpha^{-1} + a(v'_0)f(v'_0, w)\alpha^{-1} \\
&= f(a(v_0)\alpha v_0, w)\alpha^{-1} + f(a(v'_0)\alpha v'_0, w)\alpha^{-1} \\
&= (f(a(v_0)\alpha v_0, w) + f(a(v'_0)\alpha v'_0, w))\alpha^{-1}
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $w \in V$:

$$\begin{aligned}
f(a(v_0 + v'_0)\alpha(v_0 + v'_0), w) &= f(a(v_0)\alpha v_0, w) + f(a(v'_0)\alpha v'_0, w) \\
&= f(a(v_0)\alpha v_0 + a(v'_0)\alpha v'_0, w)
\end{aligned}$$

Und es folgt:

$$\underbrace{f(a(v_0 + v'_0)\alpha(v_0 + v'_0) - a(v_0)\alpha v_0 - a(v'_0)\alpha v'_0, w)}_{\in \text{rad } V \text{ (und } \text{rad } V = \{0\} \text{ wg. Regularität)}} = 0 \quad \forall w$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= a(v_0 + v'_0)\alpha(v_0 + v'_0) - a(v_0)\alpha v_0 - a(v'_0)\alpha v'_0 \\
\Rightarrow a(v_0 + v'_0)\alpha(v_0 + v'_0) &= [a(v_0)\alpha] v_0 + [a(v'_0)\alpha] v'_0 \\
&= [a(v_0 + v'_0)\alpha] v_0 + [a(v_0 + v'_0)\alpha] v'_0 \\
\Rightarrow a(v_0 + v'_0) &= a(v_0) = a(v'_0)
\end{aligned}$$

- Sei nun v_0, v'_0 linear abhängig. Da $\dim V \geq 2$, damit existiert $v_1 \in V \setminus \langle v_0 \rangle$ und v_1, v_0 sind linear unabhängig, wie auch v'_0, v_1 . Wie oben gesehen: $a(v_1) = a(v_0)$ und $a(v_1) = a(v'_0)$.

Damit gilt allgemein:

$$a(v_0) = a(v'_0) \quad \forall v_0 \in V \setminus \{0\}$$

Setze $a := a(v_0)$. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned}
f(v, w) &= af(w, v)\alpha^{-1} \\
&= a(af(v, w)\alpha^{-1})\alpha^{-1} \\
&= a(a\alpha^{-1})f(v, w)\alpha^{-2}
\end{aligned}$$

Da V regulär ist, existieren $v, w \in V$ mit $k := f(v, w) \neq 0$. Dann ist $f(k^{-1}v, w) = k^{-1}f(v, w) = 1$, es existiert also $u \in V$ mit $f(u, w) = 1$

(Normierung).

Da α ein Automorphismus ist und daher $1\alpha = 1$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= f(u, w) \\ &= (a \cdot (a\alpha^{-1})) f(u, w)\alpha^{-2} \\ &= (a \cdot (a\alpha^{-1})) 1\alpha^{-2} \\ &= a \cdot (a\alpha^{-1}) \end{aligned}$$

Es ist also $a \cdot (a\alpha^{-1}) = 1$, also gilt für alle $v, w \in V$:

$$\begin{aligned} f(v, w) &= f(v, w)\alpha^{-2} \\ \Rightarrow K &= \{f(v, w) \mid v, w \in V\} \\ \Rightarrow \alpha^{-2} &= \text{id} \\ \Rightarrow \alpha^2 &= \text{id} \end{aligned}$$

Unterscheidung in zwei Fälle:

1. Der Fall $\alpha = \text{id}$: Damit folgt aus $a(a\alpha^{-1}) = 1$, daß $a^2 = 1$ ist. Damit ist a Nullstelle von $x^2 - 1 \in K[x]$, damit ist $a = 1$ oder $a = -1$.
 - $a = 1$, dann: $f(v, w) = f(w, v)$
 - $a = -1$, dann: $f(v, w) = -f(w, v)$
2. Der Fall $\alpha^2 = \text{id} \neq \alpha$. Es gilt: $\alpha = \alpha^{-1}$. Mit (9.4.6) gilt: es existiert $b \in K \setminus \{0\}$ mit $b(b^{-1}\alpha) = a \Rightarrow b^{-1}\alpha = b^{-1}a$. Definiere $g := b^{-1}f$. Seien $v, w \in V$, dann gilt:

$$\begin{aligned} g(v, w) &= b^{-1}f(v, w) \\ &= b^{-1}af(w, v)\alpha \\ &= b^{-1}\alpha f(w, v)\alpha \\ &= (b^{-1}f(w, v))\alpha \\ &= g(w, v)\alpha \end{aligned}$$

Damit: g ist unitär, damit ist f äquivalent zu einer unitären Form.

10 Isometrien

VORAUSSETZUNG: In diesem Kapitel ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und f eine α -Bilinearform auf V .

10.1 Orthogonale Zerlegungen

In diesem Abschnitt betrachten wir unitäre, symplektische und orthosymmetrische α -Bilinearform.

10.1.1 unitär/orthogonal folgt ($V = \text{rad } V$ gdw. symplektisch)

Sei f unitär und orthogonal und $V \neq \text{rad } V$. Dann existiert ein $v \in V$ mit $f(v, v) \neq 0$.

BEWEIS: Sei $v' \in V \setminus \text{rad } V$. Es existiert $w \in V$ mit $k := f(v', w) \neq 0$. Sei $v := k^{-1}v^{-1}$.

Annahme: (V, f) ist ein Gegenbeispiel, d.h. $f(x, x) = 0 \forall x \in V$. Für alle $k_1, k_2 \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= f(k_1v + k_2w, k_1v + k_2w) \\ &= k_1(k_1\alpha) \underbrace{f(v, v)}_{=0} + k_1(k_2\alpha)f(v, w) + k_2(k_1\alpha)f(w, v) + k_2(k_2\alpha) \underbrace{f(w, w)}_{=0} \\ f(v, w) &= f(k^{-1}v', w) = k^{-1}f(v', w) \\ &= k^{-1}k = 1 \end{aligned}$$

Damit ist auch¹⁹ $f(w, v) = 1$ (da f unitär oder orthogonal ist). Damit ist

$$0 = k_1k_2\alpha + k_2k_1\alpha \forall k_1, k_2 \in K$$

Damit folgt: (*) $k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow 0 = 11\alpha + 11\alpha = 2$, Widerspruch falls $\text{char } K \neq 2$! Sei $k_1 = 1$, dann folgt aus (*): $k_2\alpha + k_2 = 0$, also $-k_2 = k_2\alpha = k_2$ für alle $k_2 \in K$. Damit ist $\alpha = \text{id}$, also ist f orthogonal²⁰ und $\text{char } K \neq 2$, Widerspruch!²¹

BEISPIEL: Sei $\alpha = \text{id}$ und $\text{char } K = 2$, $\dim V = 2$, Basis $B := \{v_1, v_2\}$ von V mit $G_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt für $k_1, k_2 \in K$:

$$\begin{aligned} 0 &= f(k_1v + k_2w, k_1v + k_2w) \\ &= k_1^2 \underbrace{f(v, v)}_{=0} + k_1k_2 \underbrace{f(v, w)}_{=1} + k_2k_1 \underbrace{f(w, v)}_{=1} + k_2^2 \underbrace{f(w, w)}_{=0} \\ &= 2k_1k_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

¹⁹zu einer falschen Antwort: „Da werd' ich ja zum Terroristen!“

²⁰„Das ist für Leute, die aus Hessen kommen, nicht so leicht, die können kein r und kein ch aussprechen. Eigentlich können sie fast gar nichts aussprechen“

²¹„Lassen Sie sich diese Lämmer auf der Zunge zergehen!“ ;-)

10.1.2 unitär/orthogonal \Rightarrow Orthogonalbasis und Diagonalmatrix

Sei f unitär oder orthogonal. Dann existiert eine Orthogonalbasis von V , damit ist die Gramsche Matrix eine Diagonalmatrix.

BEWEIS: Induktion nach $n := \dim V$.

- Induktionsverankerung: Mangel Elementen in der Basis offensichtlich $f^n \leq 1$.
- Induktionsannahme: $n \geq 2$ und Behauptung richtig für Räume der Dimension $< n$.
- Induktionsschritt: Ist $V = \text{rad } V$, so ist jede Basis Orthogonalbasis. Sei $V \neq \text{rad } V$, nach (10.1.1) existiert $v \in V$ mit $f(v, v) \neq 0$. Mit (9.4.4)b gilt: $\langle v \rangle \perp \langle v \rangle^\perp$. Es ist $\dim \langle v \rangle^\perp < \dim V$. Mit Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthogonalbasis von $\langle v \rangle^\perp$ (bezüglich $f_{\langle v \rangle^\perp \times \langle v \rangle^\perp}$).

Siehe (7.4.2), Basis von V ist $B_0 \cup \{v\}$, und zwar eine Orthogonalbasis. dumdidum...

10.1.3 (an)isotrop, hyperbolisch

Sei $v \in V$. v heißt *isotrop*, falls $f(v, v) = 0$. Ein Unterraum $U \leq V$ heißt *isotrop*, falls $f|_{U \times U}$ die Nullform ist. U heißt *anisotrop*, falls 0 das einzige isotrope Element von U ist. Ein Paar $(v, w) \in V \times V$ heißt *hyperbolisches Paar*, falls v, w isotrop sind und $f(v, w) = 1$ gilt. !

Sei v, w hyperbolisches Paar, $H := \langle v, w \rangle$, dann ist $\dim H = 2$,

$$G_{\{v, w\}}(f_{H \times H}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(w, v) & 0 \end{pmatrix}$$

Ein zweidimensionaler Unterraum von V heißt *hyperbolische Ebene*, wenn er von einem hyperbolischen Paar erzeugt wird.

10.1.4 Isotropie

Sei f orthogonal oder unitär (also nicht symplektisch). Genau dann ist U isotrop, wenn jedes Element aus U isotrop ist.

BEWEIS: U isotrop heißt: $U = \text{rad } U = U \cap U^\perp$.

„ \Rightarrow “ Aus U isotrop folgt: jedes Element aus U ist isotrop.

„ \Leftarrow “ Jedes Element aus U sei also isotrop. Angenommen, $U \neq \text{rad } U$, dann folgt mit (10.1.1): es existiert $u \in U$ mit $f(u, u) \neq 0$, also ist u nicht isotrop, Widerspruch!

10.1.5 Körperlemma

Sei $\alpha^2 = \text{id} \neq \alpha$ und $a \in K$ mit $a\alpha = a$. Dann existiert $b \in K$ mit $b + b\alpha = a$.

BEWEIS: Fallunterscheidung:

- Der Fall $k + k\alpha = 0 \forall k \in K$, dann folgt: $1 + 1\alpha = 1 + 1 = 0$, also $\text{char } K = 2$, daraus folgt: $k\alpha = -k = k \forall k \in K$, also ist $\alpha = \text{id}$, Widerspruch zu Wahl von α !
- Der Fall: es existiert $k_0 \in K$ mit $k_0 + k_0\alpha \neq 0$. Sei $k_1 := k_0 + k_0\alpha$, setze $b := k_0k_1^{-1}a$. Es gilt:

$$k_1\alpha = (k_0 + k_0\alpha)\alpha = k_0\alpha + k_0\alpha^2 = k_0\alpha + k_0 = k_1 \Rightarrow k_1^{-1}\alpha = k_1^{-1}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} b + b\alpha &= k_0k_1^{-1}a + (k_0k_1^{-1}a)\alpha \\ &= k_0k_1^{-1}a + k_0\alpha \underbrace{(k_1^{-1}\alpha)}_{k_1^{-1}} \underbrace{(a)}_a \\ &= ak_1^{-1} \underbrace{(k_0 + k_0\alpha)}_{k_1} \\ &= a \end{aligned}$$

10.1.6 Existenz eines hyperbolischen Paares

VORAUSSETZUNG: Sei f symplektisch, orthogonal oder unitär. Es existiere ein isotropes Element $v \in V \setminus \text{rad } V$.

SATZ: Es existiert ein $w \in V$, so daß (v, w) ein hyperbolisches Paar ist.

BEWEIS: Es existiert $w' \in V$ mit $f(v, w') \neq 0$. Sei $k' = (f(v, w')^{-1})\alpha^{-1}$. Dann gilt:

$$f(v, k'w') = k'\alpha f(v, w') = f(v, w')^{-1}f(v, w) = 1$$

Wir können damit w' so wählen, daß $f(v, w') = 1$. Zu zeigen bleibt: w' ist isotrop oder ein anderer von w' abgeleiteter Vektor w , für den gilt: $f(v, w) = 0$

- Falls f symplektisch, ist jeder Vektor isotrop.
- Falls f nicht symplektisch, für $k \in K$ gilt:

$$f(v, kv + w') = f(v, kv) + f(v, w') = k\alpha \underbrace{f(v, v)}_{=0} + f(v, w') = 1$$

- Falls f orthogonal: Setze $k_0 := -2^{-1}f(w', w')$ und $w := k_0v + w'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f(w, w) &= f(k_0v + w', k_0v + w') \\
&= \underbrace{f(k_0v, k_0v)}_{=0} + f(k_0v, w') + f(w', k_0v) + f(w', w') \\
&= 2k_0 \underbrace{f(v, w')}_{=1} + f(w', w') \\
&= -\frac{2}{2}f(w', w') + f(w', w') = 0
\end{aligned}$$

Damit ist w isotrop.

- Falls f unitär: Es ist $f(w', w') = f(w', w')\alpha$, also auch $-f(w', w') = (-f(w', w'))\alpha$. Wende (10.1.5) an, damit existiert ein $k_0 \in K$ mit $k_0 + k_0\alpha = -f(w', w')$. Setze $w = k_0v + w'$.

$$\begin{aligned}
f(w, w) &= f(k_0v + w', k_0v + w') \\
&= \underbrace{f(k_0v, k_0v)}_{=0} + f(k_0v, w') + f(w', k_0v) + f(w', w') \\
&= k_0 \underbrace{f(v, w')}_{=1} + k_0\alpha \underbrace{f(v, w')\alpha}_{=1} + f(w', w') \\
&= k_0 + k_0\alpha + f(w', w') \\
&= -f(w', w') + f(w', w') = 0
\end{aligned}$$

Damit ist w isotrop.

Damit ist (v, w) ein hyperbolisches Paar.

BEISPIEL: Sei $\text{char } K = 2$ und $\alpha = \text{id}$, sei $\dim V = 2$. Sei $B := \{v_1, v_2\}$ Basis von V . Sei $G_B(f) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist f symmetrisch und regulär, d.h. $\text{rad } V = \{0\}$. Offensichtlich ist v_1 isotrop. Sei $w = k_1v_1 + k_2v_2$.

$$\begin{aligned}
f(w, w) &= f(k_1v_1 + k_2v_2, k_1v_1 + k_2v_2) \\
&= k_1^2 \underbrace{f(v_1, v_1)}_{=0} + k_1k_2f(v_1, v_2) + k_1k_2f(v_2, v_1) + k_2^2f(v_2, v_2) \\
&= \underbrace{2 \cdot k_1k_2}_{=0} + k_2^2 = k_2^2
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$f(w, w) = 0 \Leftrightarrow k_2^2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = 0 \Leftrightarrow w = k_1v$$

Damit ist w linear abhängig von v ; somit existiert kein hyperbolisches Paar (v, w) in $V \times V$.

10.1.7 Unterraum durch hyperbolische Paare „aufblasen“

VORAUSSETZUNG: Sei f symplektisch, orthogonal oder unitär und V regulär bezüglich f . Sei U ein Unterraum von V mit $U = \text{rad } U \perp U_0$, sei $m := \dim \text{rad } U$.

SATZ: Für jede Basis $\{u_1, \dots, u_m\}$ von $\text{rad } U$ gilt:

1. Es existieren $v_1, \dots, v_m \in V$ mit

$$U + \langle v_1, \dots, v_m \rangle = U_0 \perp \langle u_1, v_1 \rangle \perp \dots \perp \langle u_m, v_m \rangle$$

wobei die (u_i, v_i) hyperbolische Paare sind.

2. Ist U isotrop, so ist $\dim U \leq \frac{1}{2} \cdot \dim V$

BEWEIS:

1. durch Induktion nach m :

- Induktionsanfang: $m = 0$ ist trivialerweise erfüllt.
- Induktionsannahme: $m \geq 1$ und Behauptung richtig für $m - 1$.
- Induktionsschritt: Sei

$$U^* = U_0 \perp \langle u_1, \dots, u_{m-1} \rangle \text{ wobei } \langle u_1, \dots, u_{m-1} \rangle \leq \text{rad } U^*$$

Zudem ist $\text{rad } U^* \leq \text{rad } U$, damit folgt: $\text{rad } U^* = \langle u_1, \dots, u_{m-1} \rangle$. Mit (9.4.4) ist $U^{*\perp\perp} = U^*$, also

$$\text{rad } U^{*\perp} = U^{*\perp} \cap U^{*\perp\perp} = U^{*\perp} \cap U^* = \text{rad } U^*$$

Damit folgt: $\text{rad } U^* = \text{rad } U^{*\perp} = \langle u_1, \dots, u_{m-1} \rangle$. Damit ist $u_m \in U^{*\perp}$ und nicht in $\text{rad } U^{*\perp}$. Mit (10.1.6) (angewandt auf $U^{*\perp}$ und u_m) gilt: es existiert $v_m \in U^{*\perp}$, so daß (u_m, v_m) ein hyperbolisches Paar ist.

Sei $H := \langle u_m, v_m \rangle$ hyperbolische Ebene, H ist regulär. Mit (9.4.4) folgt:

$$V = H \perp H^\perp \text{ und } U^* \leq H^\perp$$

Da H^\perp , H und V alle regulär sind, erfüllen H^\perp und U^* die Voraussetzungen für $m - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren $v_1, \dots, v_{m-1} \in H^\perp$, so daß (u_i, v_i) für $i = 1, \dots, m - 1$ hyperbolische Paare sind und

$$\begin{aligned} U^* + \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle &= U_0 \perp \langle u_1, v_1 \rangle \perp \dots \perp \langle u_{m-1}, v_{m-1} \rangle \\ U^* + \langle v_1, \dots, v_m \rangle &= U_0 \perp \langle u_1, v_1 \rangle \perp \dots \perp \langle u_{m-1}, v_{m-1} \rangle \perp H \end{aligned}$$

2. Sei U isotrop, d.h. $U = \text{rad } U$, also $U_0 = \{0\}$. Dann folgt aus eben gezeigtem 1.:

$$U \leq \underbrace{\langle u_1, v_1 \rangle \perp \dots \perp \langle u_m, v_m \rangle}_{\text{hyperbolische Ebenen}} \leq V$$

Damit ist $\dim U \leq 2 \dim U \leq \dim V$.

10.1.8 Zerlegung eines Raumes in hyperbolische Ebenen

VORAUSSETZUNG: Sei f und V wie in (10.1.7), und sei U ein bezüglich Inklusion maximaler isotroper Unterraum von V . Sei $\dim U = m$ und $\{u_1, \dots, u_m\}$ Basis von U .

BEHAUPTUNG: Es existieren $v_1, \dots, v_m \in V$, so daß:

$$V = \langle u_1, v_1 \rangle \perp \langle u_m, v_m \rangle \perp V_0$$

wobei (u_i, v_i) hyperbolische Paare und V_0 anisotrop.

BEWEIS: Wende (10.1.7) an, dann existieren v_1, \dots, v_m , so daß

$$U \leq \tilde{U} := \langle u_1, v_1 \rangle \perp \dots \perp \langle u_m, v_m \rangle$$

wobei (u_i, v_i) hyperbolische Paare sind. Sei $B := \{u_1, v_1, \dots, u_m, v_m\}$, dann ist

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist \tilde{U} regulär, also nach (9.4.4) ist $\tilde{U} \perp \tilde{U}^\perp$. Setze $V_0 := \tilde{U}^\perp$.

10.1.9 Vektorräume gerader Dimension

Sei V regulär und f symplektisch. Dann gilt:

1. $V = H_1 \perp \dots \perp H_n$ mit H_i hyperbolische Ebenen für $i = 1, \dots, n$
2. $\dim V$ ist gerade.

10.2 Isometrien

10.2.1 Definition

- Sei K Körper und α fest gewählter Automorphismus von K . V und W sind K -Vektorräume mit α -Bilinearform f bzw. g . Ein Homomorphismus $\varphi : V \rightarrow W$ heißt *Isometrie*, falls gilt:

$$f(v, w) = g(v\varphi, w\varphi) \quad \forall v, w \in V$$

- Ist zusätzlich φ bijektiv, so heißen (V, f) und (W, g) *isometrisch*.
- Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$, sei B Basis von V . Genau dann ist φ Isometrie, wenn $f(b, b') = g(b\varphi, b'\varphi)$ ist für alle Basiselemente b, b' . Sind B und B' Basen von V bzw. W und ist $\varphi : B \rightarrow B'$ eine Bijektion mit der Eigenschaft $f(b, b') = g(b\varphi, b'\varphi)$ für alle $b, b' \in B$, so sind (V, f) und (W, g) isometrisch.
- Sei V Vektorraum mit α -Bilinearform f . Dann heißt $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ f -Isometrie, falls $f(v, w) = f(v\varphi, w\varphi) \quad \forall v, w \in V$.
- Sei $I_f(V)$ die Menge aller f -Isometrien auf V .

10.2.2 Gruppe der Isomorphismen

VORAUSSETZUNG: Sei f orthosymmetrisch. Sei V regulär.

BEHAUPTUNG: Alle Elemente aus $I_f(V)$ sind Isomorphismen, und $I_f(V)$ ist eine Untergruppe von $GL(V)$.

BEWEIS: Sei $\varphi \in I_f(V)$.

- Wir zeigen: Kern $\varphi = \{0\}$, dann ist φ bijektiv. Sei $v \in \text{Kern } \varphi$. Für alle $w \in V$ gilt:

$$f(v, w) = f(v\varphi, w\varphi) = f(0, w\varphi) = 0$$

Damit ist $v \in \text{rad } V = \{0\}$ wegen der Regularität. Also Kern $\varphi = \{0\}$, und damit ist φ Isomorphismus.

- Zu zeigen bleibt: Untergruppenkriterium $x, y \in I_f(V) \Rightarrow xy^{-1} \in I_f(V)$. Sei $\varphi \in I_f(V)$, dann gilt:

$$f(v, w) = f(v\varphi^{-1}\varphi, w\varphi^{-1}\varphi) = f((v\varphi^{-1})\varphi, (w\varphi^{-1})\varphi) = f(v\varphi^{-1}, w\varphi^{-1})$$

Damit ist $\varphi^{-1} \in I_f(V)$. Seien $\varphi, \psi \in I_f(V)$. Dann gilt:

$$f(v(\varphi\psi^{-1}), w(\varphi\psi^{-1})) = f((v\varphi)\psi^{-1}, (w\varphi)\psi^{-1}) = f(v\varphi, w\varphi) = f(v, w)$$

Damit ist $\varphi\psi^{-1} \in I_f(V)$.

10.2.3 Kriterium für Isometrie

VORAUSSETZUNG: Sei B Basis von V und $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ bijektiv, und seien f und g α -Bilinearformen auf V .

BEHAUPTUNG: Genau dann ist φ eine Isometrie von (V, f) auf (W, g) , falls

$$(*) \quad G_B(f) = M(\varphi, B, B) \cdot G_B(g) \cdot (M(\varphi, B, B)\alpha)^t$$

BEWEIS:

„ \Rightarrow “ Sei φ Isometrie. Dann ist $G_B(f) = G_{B\varphi}(g)$. Mit (9.2.3) gilt:

$$\begin{aligned} (**) \quad G_B(f) = G_{B\varphi}(g) &= M(\text{id}, B\varphi, B)G_B(g)(M(\text{id}, B, B\varphi)\alpha)^t \\ &= M(\varphi, B, B) \cdot G_B(g) \cdot (M(\varphi, B, B)\alpha)^t \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ Gelte (*). Dann gilt auch (**) (siehe (9.2.3)), also ist $G_{B\varphi}(G) = G_B(f)$.

10.2.4 Beispiele

- Sei μ eine Isomor.²² von V auf W und f α -Bilinearform auf V . Für $u, w \in W$ sei $g(u, w) := f(u\mu^{-1}, w\mu^{-1})$. Dann ist g eine α -Bilinearform auf W , und (V, f) und (W, g) sind isometrisch.

$$f(v, v') \stackrel{?}{=} g(v\mu, v'\mu) = f(v\mu\mu^{-1}, v'\mu\mu^{-1}) = f(v, v')$$

Seien (V, f) und (W, h) gegeben, und es existiere ein Isomorphismus $\mu : V \rightarrow W$. Genau dann sind (V, f) und (W, h) isometrische, wenn (W, h) und (W, g) (wobei g wie oben definiert) isometrisch sind.

- Sei f orthogonal, $w \in V$ mit $f(w, w) \neq 0$. Sei

$$s_w : V \rightarrow V \text{ mit } vs_w := v - 2f(v, w) \cdot f(w, w)^{-1}w \quad \forall v \in V$$

Dann ist s_w eine Isometrie auf (V, f) und heißt *Spiegelung* zu w an $\langle w \rangle^\perp$:

- s_w ist lineare Abbildung: einfaches Nachrechnen.

²²„klingt männlicher...“

– Seien $u, v \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 f(us_w, vs_w) &= f\left(u - 2\frac{f(u, w)}{f(w, w)}w, v - 2\frac{f(v, w)}{f(w, w)}w\right) \\
 &= f(u, v) - 2\frac{f(u, w)}{f(w, w)}f(w, v) - 2\frac{f(v, w)}{f(w, w)}f(u, w) \\
 &\quad + 4\frac{f(u, w)f(v, w)}{f(w, w)f(w, w)}f(w, w) \\
 &= f(u, v) - 4\frac{f(u, w)f(v, w)}{f(w, w)} + 4\frac{f(u, w)f(v, w)}{f(w, w)} \\
 &= f(u, v)
 \end{aligned}$$

– Veranschaulichung: $V = \mathbb{R}^2$, f Skalarprodukt; $f(v, w) = |v||w| \cos \alpha$;
 $w_0 := (|v||w|^{-1} \cos \alpha)w$; $x = v - w_0$; $v - 2w_0 = v - 2\frac{|v|}{|w|} \cos \alpha w =$
 $v - 2\frac{f(v, w)}{f(w, w)}w = vs_w$

- Sei f symplektisch, $0 \neq w \in V$. Für alle $c \in K^*$ ist $vt_w := v + cf(v, w)w$ eine Isometrie auf V , dabei heißt t_w *Transvektion* zu w (bezüglich c).

$$\begin{aligned}
 &f(vt_w, v't_w) \\
 &= f(v + cf(v, w)w, v' + cf(v', w)w) \\
 &= f(v, v') + cf(v, w) \cdot \underbrace{(f(v', w) + f(w, v'))}_{=0} + \underbrace{c^2 f(v, w)f(v', w)f(w, w)}_{=0} \\
 &= f(v, v')
 \end{aligned}$$

t_w ist linear (einfaches Nachrechnen), Beachte: $f(w, w) = 0$, d.h. $w \in \langle w \rangle^\perp$.

t_w ist bijektiv: Sei $u \in \langle w \rangle^\perp$, dann: $ut_w = u$. Entweder ist $V = \langle w \rangle^\perp \Rightarrow t_w = \text{id}$, oder $V \neq \langle w \rangle^\perp$, d.h. $\dim \langle w \rangle^\perp = \dim V - 1$. Sei $w_0 \in V \setminus \langle w \rangle^\perp$ und B_0 Basis von $\langle w \rangle^\perp$. Dann ist $B = \{w_0\} \cup B_0$. Dann ist

$$M(t_w, B, B) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & * & * \\ \hline 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

Damit ist $\det M = 1$

10.2.5 Klassifikationssatz für symplektische Räume

SATZ: Zwei endlich-dimensionale reguläre symplektische Räume über K sind genau dann isometrisch, wenn sie gleiche Dimension haben.

BEWEIS:

„ \Rightarrow “ Seien (V, f) und (W, G) endlichdimensionale reguläre symplektische Räume. Ist (V, f) isometrisch zu (W, g) , so sind insbesondere V und W isomorph, also $\dim V = \dim W$.

„ \Leftarrow “ Sei $\dim V = \dim W$. Nach (10.1.9) existieren hyperbolische Paare $(v_1, w_1), \dots, (v_n, w_n)$ von V und $(v'_1, w'_1), \dots, (v'_n, w'_n)$ von W mit

$$V = \langle v_1, w_1 \rangle \perp \dots \perp \langle v_n, w_n \rangle \text{ und } W = \langle v'_1, w'_1 \rangle \perp \dots \perp \langle v'_n, w'_n \rangle$$

Insbesondere ist $\{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ Basis von V und $\{v'_1, w'_1, \dots, v'_n, w'_n\}$ Basis von W . Definiere

$$\mu : V \rightarrow W \text{ mit } v_i \mu = v'_i \text{ und } w_i \mu = w'_i$$

Es gilt: $f(v_i, v_j) = 0 = g(v_i \mu, v_j \mu)$ und

$$f(v_i, w_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = g(v_i \mu, w_j \mu)$$

Damit ist μ eine bijektive Isometrie.

10.2.6 Körperlemma

VORAUSSETZUNG: Sei K ein endlicher Körper und $K^2 := \{k^2 \mid k \in K\}$.

BEHAUPTUNG:

1.
 - bei $\text{char } K = 2$: $K = K^2$
 - bei $\text{char } K \neq 2$: $|K^*| = 2 \cdot ((K^2) - 1)$
2. Für alle $a, b \in K^*$ gilt: $K = aK^2 + bK^2$

BEWEIS:

1. Sei $k \in K$. Dann hat $x^2 - k^2 \in K[x]$ in K die Nullstellen $\pm k$. Sei $\beta : K \rightarrow K^2$ mit $k \mapsto k^2$. Sei $k^2 \in K^2 \cap K^*$.
 - Falls $\text{char } K = 2$, so hat k^2 genau ein Urbild. Damit ist β injektiv, K endlich, also β auch bijektiv, also $K = K^2$.

- Falls $\text{char } K \neq 2$ ist, so hat k^2 genau zwei Urbilder. $|K^*| = 2|K^2 \cap K^*| = 2(|K^2| - 1)$

2. Ist $\text{char } K = 2$, so ist wie gesehen $K = K^2$, damit folgt:

$$k = a \cdot (ka^{-1}) + b \cdot 0 \quad \forall k \in K^*$$

Sei also $\text{char } K \neq 2$ und $K_2 := K^2 \cap K^*$. Wie oben gesehen ist

$$2|K^2| = 2(|K_2| + 1) = 2|K_2| + 2 = |K^*| + 2 = |K| + 1$$

Damit enthält K^2 mehr als die Hälfte der Elemente von K . Die Mengen

$$-K^2 \text{ und } -b^{-1}k + (ab^{-1})K^2 = \{-b^{-1} + (ab^{-1})h^2 \mid h \in K\}$$

mit $k \in K$ haben jeweils $|K^2|$ Elemente und sind damit nicht disjunkt. Es existieren also $t, h \in K$ mit

$$-t^2 = -b^{-1}k + (ab^{-1})h^2 \Rightarrow k = bt^2 + ah^2$$

10.2.7 Klassifikation von anisotropen Vektorräumen

Sei K endlich, f orthogonal und $c \in K \setminus K^2$ und sei V anisotrop bezüglich f . Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- $\dim V = 0$
- $\dim V = 1$ und es existiert $v \in V$ mit $f(v, v) = 1$
- $\dim V = 1$ und es existiert $v \in V$ mit $f(v, v) = c$
- $\dim V = 2$ und es existiert eine Basis v_1, v_2 von V mit

$$f(v_1, v_1) = 1 \quad \wedge \quad f(v_1, v_2) = 0 \quad \wedge \quad f(v_2, v_2) = -c$$

Keine zwei der in (a) bis (d) angegebenen Räume sind isometrisch.

BEWEIS:

- Wir können annehmen: $n := \dim V \geq 1$.
- Wir zeigen: $n \leq 2$. Mit (10.1.2) gilt: Es existiert eine Orthogonalbasis v_1, \dots, v_n von V . Setze $a_i := f(v_i, v_i)$. Da V anisotrop ist, ist $a_i \neq 0$. Angenommen, $n \geq 3$. Dann folgt mit (10.2.6): $K = a_1K^2 + a_2K^2$. Es existieren $k_1, k_2 \in K$ mit $a_1k_1^2 + a_2k_2^2 = -a_3$.

$$f(k_1v_1 + k_2v_2 + v_3, k_1v_1 + k_2v_2 + v_3) = k_1^2a_1 + k_2^2a_2 + a_3 = 0$$

Da V anisotrop ist, ist $k_1v_1 + k_2v_2 + v_3 = 0$. Damit sind die Basiselemente nicht mehr linear unabhängig, Widerspruch!

- Sei nun $\dim V = 1$. Sei $K_2 := K^2 \cap K^*$, dann ist K_2 eine Untergruppe von K^* . Für $a, b \in K^*$ sei $a \sim b : \Leftrightarrow ab^{-1} \in K_2$, dann ist \sim eine Äquivalenzrelation auf K^* mit den Äquivalenzklassen aK_2 für $a \in K^*$
 - Angenommen: $a_1 \in K_2$. Dann existiert $q \in K^*$ mit $q^2 = a_1$. Setze $v := q^{-1}v_1$. Dann:

$$\begin{aligned} f(v, v) &= f(q^{-1}v_1, q^{-1}v_1) \\ &= (q^{-1})^2 f(v_1, v_1) \\ &= (q^{-1})^2 a_1 = (q^{-1})^2 q^2 = 1 \end{aligned}$$

Dies ist Fall (b).

- Angenommen, $a_1 \notin K_2$. Nach (10.2.6) ist $|K_2| = \frac{1}{2}|K^*|$, außerdem (mit der Bijektion $x \mapsto cx$) $|K_2| = |cK_2|$, also ist wegen der oben genannten Äquivalenzklassen $K^* = K_2 \uplus cK_2$. Damit ist $a_1 \in cK_2$, dann folgt $a_1 \in cK_2$, damit existieren $k^2 \in K_2$ mit $a_1 = ck^2$. Sei $v := k^{-1}v_1$, dann ist

$$f(v, v) = f(k^{-1}v_1, k^{-1}v_1) = k^{-2}a_1 = c$$

Dies ist Fall (c).

- Wir zeigen: Die Räume aus (b) und (c) sind nicht isometrisch. Sei (V, f) wie in (b) und (V, f') wie in (c). Angenommen, es existiert eine bijektive Isometrie φ von (V, f) auf (V, f') . Wende (10.2.3) an, dann:

$$G_{\{v_1\}}(f) = G_{\{v_1\varphi\}}(f') \stackrel{(10.2.3)}{=} \{(\varphi, \{v_1\}, \{v_1\})\} \cdot G_{\{v_1\}}(f') \cdot M(\varphi, \{v_1\}, \{v_1\})^t$$

Betrachte Determinanten:

$$1 = (\det M(\varphi, \{v_1\}, \{v_1\}))^2 c$$

Damit liegt $c^{-1} \in K_2$ und damit $c \in K_2$, Widerspruch! Damit existiert keine Isometrie.

- Sei nun $\dim V = 2$. Nach (10.2.6) ist $a_1K^2 + a_2K^2 = K$. Also existieren $k_1, k_2 \in K^*$ mit $a_1k_1^2 + a_2k_2^2 = 1$. Setze $w_1 := k_1v_1 + k_2v_2$, dann ist²³

$$f(w_1, w_1) = k_1a_1 + k_2a_2 = 1$$

²³Zu einem Kommentar zu einem Schreibfehler an der Tafel: „Erschrecken Sie mich doch nicht so! Sie müssen auf mein Alter Rücksicht nehmen!“

Zudem ist $\langle w_1 \rangle^\perp \perp \langle w_1 \rangle = V$, damit existiert w'_2 mit $\langle w_1 \rangle^\perp = \langle w'_2 \rangle$. Sei $b := f(w'_2, w'_2)$. Dann gilt für alle $k \in K^*$:

$$f(kw_1 + w'_2, kw_1 + w'_2) = k^2 f(w_1, w_1) + b = k^2 + b$$

Da V anisotrop ist, gilt: $k^2 + b \neq 0$ für alle $k \in K^*$, damit ist $-b \notin K_2$. Damit ist $-b \in cK_2$, dann existiert $h \in K^*$ mit $-b = ch^2$. Setze $w_2 = h^{-1}w'_2$. Dann gilt:

$$f(w_2, w_2) = f(h^{-1}w'_2, h^{-1}w'_2) = h^{-2}b = -c$$

Zudem ist w_2 ein skalares Vielfaches von w'_2 , und $w'_2 \perp w_1$, damit ist

$$f(w_1, w_2) = 0$$

Damit ergibt sich die Gram'sche Matrix als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

10.2.8 Klassifikation von Vektorräumen (f orthogonal)

Sei K endlich, $c \in K^* \setminus K^2$ und f orthogonal, und sei V regulär bezüglich f und $\dim V \geq 1$. Dann ist $n \in \mathbb{N}_0$ und es existieren hyperbolische Ebenen H_1, \dots, H_n in V , und es gilt einer der folgenden Fälle:

- (a) $\dim V = 2n + 1$ und $V = H_1 \perp \dots \perp H_n \perp \langle v_0 \rangle$ mit $f(v_0, v_0) = 1$.
- (b) $\dim V = 2n + 1$ und $V = H_1 \perp \dots \perp H_n \perp \langle v_0 \rangle$ mit $f(v_0, v_0) = c$.
- (c) $\dim V = 2n$ und $V = H_1 \perp \dots \perp H_n$.
- (c) $\dim V = 2n$ und $V = H_1 \perp \dots \perp H_{n-1} \perp V_0$ mit V_0 wie in (10.2.7)(d)

Keine zwei der in (a) bis (d) angegebenen Räume sind isometrisch.

BEWEIS: Wende (10.1.8) an: V läßt sich zerlegen in hyperbolische Ebenen und anisotropes V_0 :

$$V = H_1 \perp \dots \perp H_n \perp V_0$$

Mit (10.2.7) ist V_0 bekannt, nämlich einer der vier Fälle. Sei (v_i, w_i) hyperbolisches Paar H_i . Dann ist $B = \{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n, v_0\}$ Basis von V in den Fällen (a) und (b); sei $B = \{v_1, w_1, \dots, v_n, w_n\}$ Basis im Fall (c) und $B = \{v_1, w_1, \dots, v_{n-1}, w_{n-1}, v, w\}$ Basis im Fall (d).

Im Fall (a):

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det G_B(f) = (-1)^n$$

Im Fall (b):

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \det G_B(f) = (-1)^n c$$

Im Fall (c):

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det G_B(f) = (-1)^n$$

Im Fall (d):

$$G_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \det G_B(f) = (-1)^n c$$

Damit sind (a) und (b) sowie (c) und (d) nicht isotrop.

10.2.9 Klassifikation von Vektorräumen (f unitär)

Sei K endlich, f unitär und V regulär bezüglich f mit $\dim V \geq 1$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (a) $\dim V = 2n$ und $V = H_1 \perp \dots \perp H_n$ mit H_i hyperbolische Ebenen.
- (b) $\dim V = 2n + 1$ und $V = H_1 \perp \dots \perp H_n \perp \langle v_0 \rangle$ mit H_i hyperbolische Ebenen und $f(v_0, v_0) = 1$.

In beiden Fällen existiert eine Orthonormalbasis von V .

10.2.10 Trägheitssatz von Sylvester

DEFINITION: Der *Index* einer Bilinearform ist definiert als

$$\text{Ind } f := \max \left\{ \dim U \mid U \leq V \wedge \exists B \text{ bezüglich } f|_{U \times U} \right\}_{\text{Orth.Basis}}$$

VORAUSSETZUNG: Sei entweder

- (i) $K = \mathbb{R}$ und f orthogonal
- (ii) $K = \mathbb{C}$ und f unitär, wobei α die Komplexkonjugation ist.

BEHAUPTUNG: Dann existiert eine Orthogonalbasis B von V mit

$$f(b, b) \in \{0, 1, -1\} \forall b \in B \quad (*)$$

Für jede Basis, die $(*)$ erfüllt, ist $\text{Ind } f$ die Anzahl der $b \in B$ mit $f(b, b) = 1$.

BEWEIS: Nach (10.1.2) existiert eine Orthogonalbasis B' von V . Sei $b \in B'$ und $k_b := f(b, b)$. Dann ist

$$k_b = \begin{cases} k_b \in \mathbb{R} & \text{falls } K = \mathbb{R} \\ \overline{k_b} \in \mathbb{R} & \text{falls } K = \mathbb{C} \end{cases}$$

Falls $k_b > 0$: Es existiert $q_b \in \mathbb{R}$ mit $q_b^2 = k_b$; analog: falls $k_b < 0$: Es existiert $q_b \in \mathbb{R}$ dumdidummit $q_b^2 = -k_b$. Durch Ersetzen der $b \in B'$ mit $k_b \neq 0$ durch $q_b^{-1}b$ erhalten wir eine Basis B . Dann gilt:

$$f(q_b^{-1}b, q_b^{-1}b) = \begin{cases} q_b^{-2}f(b, b) = q_b^{-2}k_b & \text{falls } K = \mathbb{R} \\ q_b^{-1}\overline{q_b^{-1}}f(b, b) = q_b^{-2}k_b & \text{falls } K = \mathbb{C} \end{cases}$$

Dabei ist

$$q_b^{-2}k_b = \begin{cases} k_b^{-1}k_b = 1 & \text{falls } k_b > 0 \\ -k_b^{-1}k_b = -1 & \text{falls } k_b < 0 \end{cases}$$

Damit ist $f(b, b) \in \{0, 1, -1\} \forall b \in B$.

Sei $U \leq V$ mit Orthonormalbasis E und $\dim U = \text{Ind } f$. Sei $B_1 = \{b \in B \mid f(b, b) = 1\}$ und $B^* = B \setminus B_1$. Zu zeigen: $\dim U = |B_1|$.

Angenommen, $|B_1| \neq \dim U$, also $|B_1| < \dim U$ (der Fall $|B_1| > \dim U$ geht nicht, da $\dim U$ maximal gewählt wurde). Dann ist

$$\dim U + \dim \langle B^* \rangle = \dim U + |B^*| > |B_1| + |B^*| = |B| = \dim V$$

Nach Dimensionssatz ist aber

$$\dim V = \dim U + \dim \langle B^* \rangle - \dim(U \cap \langle B^* \rangle)$$

Damit ist $U \cap \langle B^* \rangle \neq \{0\}$. Sei also $w \in U \cap \langle B^* \rangle$ mit $w \neq 0$. Dann existieren $h_e, l_b \in K$ mit

$$w = \sum_{e \in E} h_e e = \sum_{b \in B^*} l_b b$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(w, w) &= f\left(\sum_{e \in E} h_e e, \sum_{e \in E} h_e e\right) \\ &= \sum_{e \in E} \begin{cases} h_e^2 f(e, e) = h_e^2 & \text{falls } K = \mathbb{R} \\ h_e \overline{h_e} f(e, e) & \text{falls } K = \mathbb{C} \end{cases} \\ f(w, w) &= f\left(\sum_{b \in B^*} l_b b, \sum_{b \in B^*} l_b b\right) \\ &= \sum_{b \in B^*} \begin{cases} l_b^2 f(b, b) & \text{falls } K = \mathbb{R} \\ l_b \overline{l_b} f(b, b) & \text{falls } K = \mathbb{C} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist

(i) bei $K = \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\sum_{e \in E} h_e^2}_{>0} = \sum_{b \in B^*} \underbrace{l_b^2 f(b, b)}_{=0 \vee =-1} \leq 0$$

(ii) bei $K = \mathbb{C}$:

$$\underbrace{\sum_{e \in E} h_e \overline{h_e}}_{>0} = \sum_{b \in B^*} \underbrace{l_b \overline{l_b} f(b, b)}_{=0 \vee =-1} \leq 0$$

10.2.11 Klassifikationssatz für orthogonale und unitäre Räume

SATZ: Zwei endlichdimensionale reguläre Vektorräume, die beide (i) oder beide (ii) aus (10.2.10) erfüllen, sind genau dann isometrisch, wenn sie gleiche Dimension und gleichen Index haben. BEWEIS: Sei (V, f) und (V', f') endlichdimensional, regulär mit (i) bzw. (ii) aus (10.2.10).

„ \Leftarrow “ Angenommen, $\dim V = \dim V'$ und $\text{Ind } f = \text{Ind } f'$. Wende (10.2.10) an:
 Es existieren Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V und $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ von V' .
 Sei $n = \dim V$.

$$\begin{aligned} f(b_i, b_i) &= f'(b'_i, b'_i) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, \text{Ind } f \\ f(b_j, b_j) &= f'(b'_j, b'_j) = -1 \quad \forall i = \text{Ind } f + 1, \dots, n \end{aligned}$$

Sei $\varphi : V \rightarrow V'$ die lineare Fortsetzung der Abbildung $b_i \mapsto b'_i \quad \forall i = 1, \dots, n$. Dann gilt: $f(b_i, b_j) = f'(b'_i \varphi, b'_j \varphi)$ und φ ist bijektive Isometrie.

„ \Rightarrow “ Seien (V, f) und (V', f') isometrisch, sei φ bijektive Isometrie. Damit sind die Räume isomorph, also $n := \dim V = \dim V'$. Zu zeigen: $\text{Ind } f = \text{Ind } f'$. Seien B, B' wie oben Basen, also $f(b_i, b_i) = 1$ für $i \leq \text{Ind } f$. Dann ist $B\varphi = \{b_1\varphi, \dots, b_n\varphi\}$ Basis von V' und $f(b_i, b_i) = f'(b_i\varphi, b_i\varphi) \in \{0, 1, -1\}$ für alle i .

Die Anzahl der $b_i\varphi \in B\varphi$ mit $f(b_i\varphi, b_i\varphi) = 1$ ist $\text{Ind } f$. Nach (10.2.10) ist diese Anzahl auch $\text{Ind } f'$, also $\text{Ind } f = \text{Ind } f'$.

10.2.12 Satz von Witt

SATZ: Sei f orthogonal, symplektisch oder unitär und V regulär bezüglich f . Seien U_1 und U_2 Unterräume von V . Es existiere eine bijektive Isometrie φ von $(U_1, f|_{U_1 \times U_1})$ auf $(U_2, f|_{U_2 \times U_2})$. Dann existiert $\varphi^* \in I_f(V)$ mit $\varphi^*|_{U_1} = \varphi$.

BEWEIS: Induktion nach $\dim V$.

- Induktionsverankerung: Bei $\dim V = 0$ ist nichts zu zeigen.
- Induktionsannahme: Sei $n := \dim V > 0$ und die Behauptung richtig für Vektorräume kleinerer Dimension.
- Induktionsschritt: Fallunterscheidung:
 - (A) U_1 ist nicht isotrop, und es existiert ein regulärer Unterraum $\{0\} \neq H \leq U_1 \cap U_2$ mit $\varphi|_H = \text{id}$.
 - (B) U_1 ist nicht isotrop.
 - (B₁) f ist symplektisch.
 - (B₂) Es existiert $v_1 \in U_1$ mit $f(v_1, v_1) \neq 0$ und $H = \langle v_1, v_1\varphi \rangle$ ist regulär.
 - (B₃) Es existiert $v_1 \in U_1$ mit $f(v_1, v_1) \neq 0$ und $H = \langle v_1, v_1\varphi \rangle$ ist nicht regulär.
 - (C) U_1 ist isotrop.

(A) Sei $V_0 := H^\perp$. Nach (9.4.4)(b) angewandt auf V , U und U_2 gilt:

$$V = H \perp V_0 \quad U_2 = H \perp (V_0 \cap U_2) \quad U_1 = H \cap (V_0 \cap U_1)$$

Da $\varphi|_H = \text{id}$ ist, ist $(V_0 \cap U_1)\varphi = V_0 \cap U_2$, damit ist $\varphi|_{V_0 \cap U_1}$ eine bijektive Isometrie. Außerdem gilt wegen $H \neq \{0\}$: $\dim V_0 < \dim V$. Da V regulär ist, ist auch V_0 regulär (aus $V = H \perp V_0$). Nach Induktion existiert $\mu \in I_{f|_{V_0 \times V_0}}(V_0)$ mit $\mu|_{U_1 \cap V_0} = \varphi|_{U_1 \cap V_0}$.

Sei $k := \dim H$ und $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von H sowie $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ Basis von V_0 . Dann ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V .

Sei φ^* die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\varphi^* : v_i \mapsto \begin{cases} v_i & \text{falls } i \leq k \\ v_i \mu & \text{falls } i > k \end{cases}$$

Dann ist φ^* bijektiv, und $f(v_i, v_j) = f(v_i \varphi^*, v_j \varphi^*)$ für alle i, j . Also ist $\varphi^* \in I_f(V)$. Sei $u_1 \in U_1$. Dann ist $u_1 = h + v_0$ mit $h \in U$ und $v_0 \in U_1 \cap V_0$. Dann ist

$$u_1 \varphi^* = h \varphi^* + v_0 \varphi^* = h \text{id} + v_0 \text{id} = (h + v_0) \varphi = u_1 \varphi$$

(B) Nach (10.1.2) ist f symplektisch, oder es existiert $v_i \in U_1$ mit $f(v_1, v_1) \neq 0$.

(B₁) Nach (10.1.6) existiert eine hyperbolische Ebene H_1 in U_1 . Definiere $H'_1 := H_1 \varphi$, seien $V_0 := H_1^\perp$ und $V'_0 := H'_1{}^\perp$. Mit (9.4.4)(b) ist

$$V = H_1 \perp V_0 = H'_1 \perp V'_0$$

und V_0 und V'_0 sind reguläre symplektische Räume bezüglich $f|_{V_0 \times V_0}$ bzw. $f|_{V'_0 \times V'_0}$ der Dimension $\dim V - 2$. Nach (10.1.9) existieren hyperbolische Ebenen H_2, \dots, H_r in V_0 und H'_2, \dots, H'_r in V'_0 , so daß

$$V = H_1 \perp \dots \perp H_r = H'_1 \perp \dots \perp H'_r$$

Seien v_i, w_i hyperbolische Paare von H_i bzw. v'_i, w'_i von H'_i , wobei $v'_1 = v_1 \varphi$ und $w'_1 = w_1 \varphi$. Sei ψ die lineare Fortsetzung der Abbildung $v_i \mapsto v'_i$ bzw. $w_i \mapsto w'_i$. Dann ist ψ eine bijektive Isometrie, d.h. $\psi \in I_f(V)$.

Definiere $\varphi' := \psi^{-1} \varphi|_{U_1 \psi}$, dann ist φ' ein bijektiver Isomorphismus von $U \psi$ auf U_2 .

Betrachte $\varphi'|_{H'_1}$, dies ist gleich der Identität, da $v'_1 \psi' = v_1 \psi \psi^{-1} \varphi =$

$v_i\varphi$ (analog für w_1).

Nach Fall (A) existiert ein $\nu \in I_f(V)$ mit

$$\nu|_{U_1\psi} = \varphi' = \psi^{-1}\varphi|_{U_1\psi} \Rightarrow \psi\nu|_{U_1} = \varphi$$

Setze $\varphi^* = \psi\nu$.

(B₂) Sei $k := \dim H$, d.h. $k = 1$ oder $k = 2$. Mit (9.4.4) ist $V = H \perp H^\perp$. Nach (10.1.2) existieren in H Orthogonalbasen $\{v_1, v_k\}$ und $\{v'_1, v'_k\}$ mit $v'_1 = v_1\varphi$. Sei v_{k+1}, \dots, v_n Orthogonalbasis von H^\perp . Dann sind

$$B = \{v_1, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \text{ und } B' = \{v'_1, v'_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Orthogonalbasen von V .

* Sei $k = 1$. Dann ist die lineare Fortsetzung ψ der Abbildung $v_1 \mapsto v'_1$ und $v_i \mapsto v_i$ für $i > 1$ aus $I_f(V)$, denn $f(v_1, v_1) = f(v_1\varphi, v_1\varphi) = f(v'_1, v'_1)$.

Es gilt: $H = \langle v_1 \rangle = \langle v_1\varphi \rangle \leq U_1\psi \cap U_2$, zudem ist H regulär. Setze $\varphi' := \psi^{-1}\varphi$, dann ist $\varphi'|_H = \text{id}$. Nach Fall (A) existiert $\nu \in I_f(V)$ mit

$$\nu|_{U_1\psi} = \varphi' = \psi^{-1}\varphi|_{U_1\psi} \Rightarrow \psi\nu|_{U_1} = \varphi$$

Setze $\varphi^* = \psi\nu$.

* Sei $k = 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} \det G_B(f) &= f(v_1, v_1)f(v_2, v_2) \prod_{i \geq 3} f(v_i, v_i) \\ \det G_{B'}(f) &= f(v'_1, v'_1)f(v'_2, v'_2) \prod_{i \geq 3} f(v_i, v_i) \\ &= \underbrace{f(v_1\varphi, v_1\varphi)}_{f(v_1, v_1)} f(v'_2, v'_2) \prod_{i \geq 3} f(v_i, v_i) \end{aligned}$$

Nach (9.2.3) ist für ein $h \in K^*$

$$\det G_B(f) = \det G_{B'}(f) \cdot h \cdot h\alpha \Rightarrow f(v_2, v_2) = hh\alpha f(v'_2, v'_2)$$

Ersetze in der Basis B' das Element v'_2 durch hv'_2 . Dann ist

$$f(hv'_2, hv'_2) = hh\alpha f(v'_2, v'_2) = f(v_2, v_2)$$

Wir können auch annehmen: $f(v_2, v_2) = f(v'_2, v'_2)$. Sei ψ die lineare Fortsetzung der Abbildung $v_i \mapsto v'_i$ für $i = 1, 2$ und

$v_i \mapsto v_i$ für $i \geq 3$. Dann ist $\psi \in I_f(V)$ und für $\varphi' = \psi^{-1}\varphi$ gilt. Dann ist $\psi^{-1}\varphi : U_1\psi \rightarrow U_2$ Isometrie und

$$\langle v_1\varphi \rangle = \langle v'_1 \rangle = \langle v_1\psi \rangle \in U_1\psi \cap U_2$$

und $\langle v_1\varphi \rangle$ ist regulär, und $\varphi'|_{\langle v'_1 \rangle} = \text{id}$. Nach Fall (A) existiert wieder ν wie oben, setze $\varphi^* = \psi\nu$.

(B₃) Da H nicht regulär ist, ist $\dim H = 2$ (da $0 < \dim \text{rad } V < \dim H$). Zudem existiert $0 \neq v_0 \in \text{rad } H$ und

$$H = \langle v_0 \rangle \perp \langle v_1 \rangle = \langle v_0 \rangle \perp \langle v_1\varphi \rangle$$

Mit (10.1.6) existiert $w_0 \in \langle v_1 \rangle^\perp$ so, daß (v_0, w_0) ein hyperbolisches Paar ist. Sei

$$H_0 := \langle v_1, v_0, w_0 \rangle = \langle v_1 \rangle \perp \langle v_0, w_0 \rangle$$

Wir zeigen: H_0 ist regulär. Die Gramsche Matrix bezüglich $\{v_1, v_0, w_0\}$ ist

$$\det G_{\{v_1, v_0, w_0\}}(f) = \det \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm f(v_1, v_1) \neq 0$$

Satz (10.1.6) angewandt auf H_0 besagt: Es existiert $w'_0 \in \langle v_1\varphi \rangle^\perp \cap H_0$, so daß (v_0, w'_0) ein hyperbolisches Paar ist. Dann ist $H_0 = \langle v_1^\perp \rangle \perp \langle v_0, w'_0 \rangle$. Dann sind B_0 und B'_0 Basen von H_0 :

$$B_0 := \{v_1, v_0, w_0\} \text{ und } B'_0 = \{v_1\varphi, v_0, w'_0\}$$

Es ist $V = H_0 \perp H_0^\perp$, ergänze daher die Basen B_0 und B'_0 zu Basen B und B' durch Hinzufügen einer Basis B_1 von H_0^\perp .

Sei ψ die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$v_1 \mapsto v_1\varphi \quad v_0 \mapsto v_0 \quad w_0 \mapsto w'_0 \quad b \mapsto b \quad \forall b \in B_1$$

Die Abbildung ψ ist bijektiv und Isometrie.

Es ist $v_1\psi = v_1\varphi \in U_1\psi \cap U_2$ und $\langle v_1\varphi \rangle$ ist regulär. Sei $\varphi' := \psi^{-1}\varphi|_{U_1\psi}$. Dann ist $(v_1\varphi)\varphi' = v_1\varphi$, also ist $\varphi'|_{\langle v_1\varphi \rangle} = \text{id}$. Dann ist φ' bijektive Isometrie mit $\varphi' : U_1\psi \rightarrow U_2$. Nach Fall (A) existiert wieder ν wie oben.

(C) U_1 ist isotrop. Dann ist auch $U_2 = U_1\varphi$ isotrop. Sei $k := \dim U_1$. Sei $\{u_1, \dots, u_k\}$ Basis von U_1 (dann ist $\{u'_1, \dots, u'_k\}$ Basis von U_2 , wobei $u'_i = u_i\varphi$). Mit (10.1.7) existiert eine Basis $v_1, \dots, v_k, v'_1, \dots, v'_k$ in V , so daß (u_i, v_i) und (u'_i, v'_i) hyperbolische Paare sind. Sei

$$W_1 := \langle u_1, v_1 \rangle \perp \dots \perp \langle u_k, v_k \rangle \text{ und } W_2 := \langle u'_1, v'_1 \rangle \perp \dots \perp \langle u'_k, v'_k \rangle$$

W_1 und W_2 sind reguläre Unterräume der Dimension $2k$, also nicht isotrop. Definiere

$$\varphi' : W_1 \rightarrow W_2 \text{ mit } \varphi' : u_i \mapsto u'_i (= u_i\varphi) \text{ und } \varphi' : v_i \mapsto v'_i$$

φ' ist bijektive Isometrie von W_1 auf W_2 , W_1 ist nicht isotrop. Nach Fall B existiert $\varphi^* \in I_f(V)$ mit $\varphi^*|_{W_1} = \varphi'$. Es gilt also $\varphi^*|_{U_1} = \varphi'|_{U_1} = \varphi$.

11 Skalarprodukte

In diesem Kapitel ist V ein Vektorraum über K und $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

11.1 Grundlagen

11.1.1 Definition

Eine α -Bilinearform auf V heißt Skalarprodukt auf V , falls für alle $v \in V$ gilt:

1. $f(v, v) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*positiv definit*)
2. $f(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3.
 - falls $K = \mathbb{R}$: $\alpha = \text{id}$ und f orthogonal
 - falls $K = \mathbb{C}$: α ist die Komplexkonjugation, und f ist unitär

BEISPIEL: V der Vektorraum der komplexwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$. Definiere

$$f(h, g) = \int_0^1 h(x)\overline{g(x)} dx \quad \forall g, h \in V$$

Eigenschaften:

1. $\int_0^1 h(x)\overline{h(x)} dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx \geq 0$
2. $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = 0 \Leftrightarrow h = 0$
3. f ist unitär

11.1.2 Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt

Sei V Vektorraum mit Skalarprodukt f , sei $n := \dim V$ und $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V . Sei $b_1^* = b_1$. Rekursives Verfahren: Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r < n$. Seien b_1^*, \dots, b_r^* so definiert, daß sie orthogonal sind und $W_r := \langle b_1, \dots, b_r \rangle = \langle b_1^*, \dots, b_r^* \rangle$. Beachte: $b_{r+1} \notin W_r$, d.h. $b_1^*, \dots, b_r^*, b_{r+1} + v$ sind linear unabhängig für alle $v \in W_r$. Sei $v := \sum_{j=1}^r k_j b_j^*$

$$\begin{aligned} f(b_i^*, b_{r+1} + v) &= f(b_i^*, b_{r+1}) + f(b_i^*, v) \\ &= f(b_i^*, b_{r+1}) + \sum_{j=1}^r \overline{k_j} f(b_i^*, b_j^*) \\ &= f(b_i^*, b_{r+1}) + \overline{k_i} f(b_i^*, b_i^*) \end{aligned}$$

Setze

$$-\overline{k_i} = f(b_i^*, b_{r+1}) f(b_i^*, b_i^*)^{-1} \quad \forall i = 1, \dots, r \quad \text{und} \quad b_{r+1}^* := b_{r+1} + v$$

Dann ist $\{b_1^*, \dots, b_{r+1}^*\}$ Orthogonalbasis. Rekursiv angewendet ergibt sich $\{b_1^*, \dots, b_n^*\}$ als Orthogonalbasis von V . Für $b_i^{**} := f(b_i^*, b_i^*)^{-\frac{1}{2}} b_i^*$ ist $b_1^{**}, \dots, b_n^{**}$ eine Orthonormalbasis von V .²⁴

11.1.3 Schwarzsche Ungleichung

Seien $v, w \in V$. Dann gilt:

$$|f(v, w)|^2 \leq f(v, v) f(w, w)$$

Außerdem gilt die Gleichheit genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

BEWEIS: Für $v = 0 = w$ gilt die (Un)Gleichung. Sei nun O.B.d.A. $w \neq 0$, sei $a := -f(v, w) f(w, w)^{-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq f(v + aw, v + aw) &= f(v, v) + \overline{a} f(v, w) + a f(w, v) + a \overline{a} f(w, w) \\ &= f(v, v) + \overline{a} f(v, w) + a \overline{f(v, w)} + a \overline{a} f(w, w) \\ \xrightarrow[\text{mit } f(w, w)]{\text{Multiplikation}} 0 &\leq f(w, w) f(v, v) \\ &\quad - \overline{f(v, w)} f(w, w)^{-1} f(v, w) f(w, w) \\ &\quad - f(v, w) f(w, w)^{-1} \overline{f(v, w)} f(w, w) \\ &\quad + f(v, w) \overline{f(v, w)} f(w, w)^{-1} f(w, w)^{-1} f(w, w) f(w, w) \\ &= f(v, v) f(w, w) - f(v, w) \overline{f(v, w)} \\ &= f(v, v) f(w, w) - |f(v, w)|^2 \end{aligned}$$

²⁴ „Wir haben noch fünf Minuten, vielleicht gebe ich Ihnen dann die fünf Minuten, um sich warmzulaufen, sie werden's brauchen!“

Sei $w = kv$. Dann folgt:

$$|f(v, kv)|^2 = |\bar{k}|^2 |f(v, v)|^2 \quad \text{und} \quad |k|^2 f(v, v)^2 = f(v, v)f(kv, kv)$$

11.1.4 (induzierte) Normen

DEFINITION: Sei $\|\cdot\|$ eine Abbildung von V in \mathbb{R} , so daß für alle $v, w \in V$, $k \in K$ gilt:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|kv\| = |k| \|v\| \quad \forall k \in K$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Dann heißt $\|\cdot\|$ Norm auf V .

Durch

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \|v\| := \sqrt{f(v, v)}$$

wird die von f auf V induzierte Norm definiert. BEWEIS:

3. Betrachte nur Quadrate²⁵:

$$\begin{aligned} f(v, w) + \overline{f(v, w)} &= 2\Re(f(v, w)) \\ &\leq |f(v, w)| \\ &\stackrel{(11.1.3)}{\leq} 2\|v\| \|w\| \\ \|v + w\|^2 &= f(v + w, v + w) \\ &= f(v, v) + f(w, w) + f(v, w) + \overline{f(v, w)} \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\| \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

11.2 Normierte Vektorräume

Ein Vektorraum V heißt normiert, falls auf V eine Norm existiert.

BEISPIELE:

1. Sei $n := \dim V$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V . Dann ist folgendes die 1-Norm:

$$\left\| \sum_{i=1}^n k_i b_i \right\| := \sum_{i=1}^n |k_i|$$

²⁵ „... mit der Wurzel aus der Schwarzschen Ungleichung folgt ...“

2. Sei V der Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, $f \in V$. Dann sind folgende Abbildungen Normen:

$$\|f\| := \max \{ |f(x)| \mid x \in [0, 1] \} \quad \text{und} \quad \|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

11.2.1 Stetigkeit linearer Abbildungen mit Norm

Sei V endlichdimensional, $n := \dim V$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis. Sei $\|\cdot\|$ die 1-Norm auf V . Sei W ein weiterer normierter Vektorraum und $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$. Dann ist die folgende Abbildung stetig:

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \psi : v \mapsto \|v\varphi\|$$

BEWEIS: Sei $M := \max \{ \|b_i\varphi\| \mid i = 1, \dots, n \}$. Sei $v = \sum_{i=1}^n k_i b_i \in V$. Dann ist

$$\|v\varphi\| = \left\| \sum_{i=1}^n k_i b_i \varphi \right\| \leq \sum_{i=1}^n |k_i| \|b_i\varphi\| \leq M \cdot \sum_{i=1}^n |k_i| = M \|v\|$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$. Seien nun $v, v' \in V$ mit $\|v - v'\| < \delta$. Dann folgt:

$$\|v\varphi - v'\varphi\| = \|(v - v')\varphi\| \leq M \|v - v'\| \leq \frac{M}{M+1} \varepsilon < \varepsilon$$

11.2.2 Äquivalente Normen

Sei V endlichdimensionaler \mathbb{R} -Raum²⁶ und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf V . Dann existiere $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$c_1 \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq c_2 \|v\|_1 \quad \forall v \in V$$

BEWEIS: Sei $n := \dim V$ und $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V . Sei $V' = \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_0$ die 1-Norm bezüglich der kanonischen Basis von V' . Sei

$$\varphi : V' \rightarrow V \quad \text{mit} \quad \varphi : (k_1, \dots, k_n) \mapsto \sum_{i=1}^n k_i b_i$$

Dann ist $\varphi \in \text{Hom}(V', V)$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf V . Die Abbildung $\psi : (k_1, \dots, k_n) \mapsto \|(k_1, \dots, k_n)\varphi\|$ ist stetig nach (11.2.1). Sei

$$B := \{ (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|(k_1, \dots, k_n)\|_0 = 1 \}$$

²⁶siehe genauer Stellmachers Script

B ist kompakt. ψ hat auf B ein Minimum. Sei

$$m_{\|\cdot\|} = \min \{ \|(k_1, \dots, k_n)\varphi\| \mid (k_1, \dots, k_n) \in B \}$$

Für $0 \neq w \in V'$ ist $\|w\|_0^{-1} w \in B$. Damit ist

$$\|w\|_0^{-1} \|w\varphi\| = \| \|w\|_0^{-1} w\varphi \| \geq m_{\|\cdot\|}$$

Dann folgt mit $M_{\|\cdot\|} = \max \{ \|b_i\| \mid i = 1, \dots, n \}$:

$$m_{\|\cdot\|} \|w_0\| \leq \|w\varphi\| \leq M_{\|\cdot\|} \|w\|_0$$

Dann ist

$$\frac{1}{M_{\|\cdot\|}} \|w\varphi\| \leq \|w\|_0 \leq \frac{1}{m_{\|\cdot\|}} \|w\varphi\|$$

Für verschiedene Normen folgt mit $\frac{1}{M_{\|\cdot\|_1}} \|w\varphi\| \leq \|w\|_0 \leq \frac{1}{m_{\|\cdot\|_2}} \|w\varphi\|$, daß:

$$\frac{m_{\|\cdot\|_2}}{M_{\|\cdot\|_1}} \|w\varphi\|_1 \leq \|w\varphi\|_2 \leq \frac{m_{\|\cdot\|_1}}{M_{\|\cdot\|_2}}$$

11.2.3 Stetigkeit linearer Abbildungen

Seien V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume. Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$.

Dann ist φ stetig.

BEWEIS: Sei $n := \dim V$, Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V und $M := \max \{ \|b_i\varphi\| \mid i = 1, \dots, n \}$.

Sei $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm. Mit (11.2.2) existiert $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|\cdot\|_1 \leq c \|\cdot\|$. Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{c(M+1)}$. Seien $v, v' \in V$ mit $\|v - v'\| < \delta$. Seien $k_i, k'_i \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n k_i b_i$ und $v' = \sum_{i=1}^n k'_i b_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|v\varphi - v'\varphi\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (k_i - k'_i) b_i \varphi \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |k_i - k'_i| \|b_i \varphi\| \leq M \cdot \sum_{i=1}^n |k_i - k'_i| \\ &= M \|v - v'\|_1 \leq M c \|v - v'\| < M c \delta = \frac{M}{M+1} \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

11.3 Adjungierte Abbildungen

In diesem Abschnitt sind V und W endlichdimensionale Vektorräume über K ($= \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$) mit Skalarprodukt f bzw. g . V^* ist der Dualraum von V .

11.3.1

Sei $h \in V^*$. Dann existiert genau ein $w \in V$ mit $vh = f(v, w)$ für alle $v \in V$.

BEWEIS: Sei $w \in V$. Nach (9.3.5): $vh_w := f(v, w)$ definiert ein Element aus V^* . Sei B Basis von V . Sei $B' = \{h_b \mid b \in B\} \subseteq V^*$, wir zeigen: B' ist Basis von V^* .

Nach (9.3.1) gilt $\dim V = \dim V^*$, es genügt zu zeigen: Alle h_b sind linear unabhängig. Seien $k_b \in K$ mit $\sum_{b \in B} k_b h_b = 0$. Dann ist für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned} 0 &= v \sum_{b \in B} k_b h_b \\ &= \sum_{b \in B} k_b v h_b \\ &= \sum_{b \in B} k_b f(v, b) \\ &= f\left(v, \sum_{b \in B} \overline{k_b} b\right) \end{aligned}$$

Da f regulär ist, ist $\sum_{b \in B} \overline{k_b} b = 0$, da B Basis ist, also sind alle $\overline{k_b} = 0 = k_b$. Damit sind alle h_b linear unabhängig. Schreibe h als Linearkombination von B' , dann existieren $l_b \in K$ mit $h = \sum_{b \in B} l_b h_b$. Setze dann

$$w := \sum_{b \in B} \overline{l_b} b$$

Dann ist für $v \in V$:

$$\begin{aligned} vh &= \sum_{b \in B} l_b v h_b \\ &= \sum_{b \in B} l_b f(v, b) \\ &= f\left(v, \sum_{b \in B} \overline{l_b} b\right) = f(v, w) \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von w folgt aus der Regularität von V .

11.3.2 Existenz der adjungierten Abbildung

Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$. Dann existiert genau ein $\varphi^{\text{ad}} \in \text{Hom}(W, V)$ mit

$$g(v\varphi, w) = f(v, w\varphi^{\text{ad}}) \quad \forall v \in V, w \in W$$

Nenne die Abbildung φ^{ad} die zu φ adjungierte Abbildung. BEWEIS: Aus der Regularität von V folgt die Eindeutigkeit, es bleibt die Existenz zu zeigen. Sei $w \in W$, folgendes ist dann eine lineare Abbildung aus V^* :

$$h'_w : V \rightarrow K \text{ mit } vh'_w := g(v\varphi, w)$$

Mit (11.3.1): Es existiert $v_w \in V$ mit $vh'_w = f(v, v_w) \forall v \in V$. Definiere nun

$$\varrho : W \rightarrow V \text{ mit } \varrho : w \mapsto v_w$$

Es gilt für $k \in K$:

$$\begin{aligned} f(v, (kw)\varrho) &= f(v, v_{kw}) = vh'_{kw} = g(v\varphi, kw) \\ &= \overline{k}g(v\varphi, w) = \overline{k}vh'_w = \overline{k}f(v, v_w) = f(v, kv_w) \\ &= f(v, k(w\varrho)) \end{aligned}$$

Damit für alle $v \in V$: $f(v, (kw)\varrho - k(w\varrho)) = 0$, mit der Regularität: $(kw)\varrho = k(w\varrho)$. Ähnlich zeigt man, daß ϱ linear bezüglich der Addition ist, damit ist ϱ eine lineare Abbildung.

Definiere nun $\varphi^{\text{ad}} := \varrho$, dann ist $g(v\varphi, w) = f(v, w\varphi^{\text{ad}})$.

BEISPIEL: Zur Erinnerung: Sei $B := \{e_1, \dots, e_n\}$ Orthonormalbasis von V ; $w = \sum_{i=1}^n k_i e_i$ Linearkombination. Dann ist

$$f(w, e_i) = f\left(\sum_{j=1}^n k_j e_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^n k_j f(e_j, e_i) = k_j$$

Für alle $v \in V$ gilt also:

$$v = f(v, e_1)e_1 + \dots + f(v, e_n)e_n$$

Sei $V = \mathbb{C}^2$ und

$$\varphi \text{ mit } M(\varphi, B, B) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Was ist $M(\varphi^{\text{ad}}, B, B)$?

$$M(\varphi^{\text{ad}}, B, B) = \begin{pmatrix} f(e_1\varphi^{\text{ad}}, e_1) & f(e_1\varphi^{\text{ad}}, e_2) \\ f(e_2\varphi^{\text{ad}}, e_1) & f(e_2\varphi^{\text{ad}}, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da

$$\begin{aligned} f(e_1\varphi^{\text{ad}}, e_1) &= \overline{f(e_1, e_1\varphi^{\text{ad}})} = \overline{f(e_1\varphi, e_1)} = \overline{i} = -i \\ f(e_1\varphi^{\text{ad}}, e_2) &= \overline{f(e_1, e_2\varphi^{\text{ad}})} = \overline{f(e_2\varphi, e_1)} = \overline{2} = 2 \\ f(e_2\varphi^{\text{ad}}, e_1) &= 0 \\ f(e_2\varphi^{\text{ad}}, e_2) &= 1 \end{aligned}$$

11.3.3 Eigenschaften der adjungierten Abbildung

Seien $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ und $\mu \in \text{Hom}(W, T)$, wobei T ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum und Skalarprodukt h ist. Dann gilt:

1. $(\varphi + \psi)^{\text{ad}} = \varphi^{\text{ad}} + \psi^{\text{ad}}$
2. $(k\varphi)^{\text{ad}} = \bar{k}\varphi^{\text{ad}}$
3. $(\varphi\mu)^{\text{ad}} = \mu^{\text{ad}}\varphi^{\text{ad}}$
4. $(\varphi^{\text{ad}})^{\text{ad}} = \varphi$
5. $\text{Kern } \varphi = (\text{Bild } \varphi^{\text{ad}})^{\perp}$, φ injektiv genau dann, wenn φ^{ad} surjektiv
6. $\text{Bild } \varphi^{\text{ad}} = (\text{Kern } \varphi)^{\perp}$, φ surjektiv genau dann, wenn φ^{ad} injektiv
7. Ist φ bijektiv, so ist $(\varphi^{-1})^{\text{ad}} = (\varphi^{\text{ad}})^{-1}$.

BEWEIS:

1.-4. einfaches Nachrechnen

5. Sei $v \in \text{Kern } \varphi$, dann ist $0 = g(v\varphi, w) = f(v, w\varphi^{\text{ad}})$, damit ist v senkrecht auf $\text{Bild } \varphi^{\text{ad}}$. Mit $v \in (\text{Bild } \varphi^{\text{ad}})^{\perp}$, $w \in W$ ist $f(v, w\varphi^{\text{ad}}) = 0 = g(v\varphi, w)$, damit ist $v\varphi \in \text{rad } W$ also $v \in \text{Kern } \varphi$.

Zusatz folgt wegen $V = U \perp U^{\perp}$ für alle $U \leq V$ angewandt auf $U = \text{Bild } \varphi^{\text{ad}}$.

6. $(\text{Kern } \varphi)^{\perp} = (\text{Bild } \varphi^{\text{ad}})^{\perp\perp} \stackrel{(9.4.4)}{=} \text{Bild } \varphi^{\text{ad}}$
7. Folgt aus 3. wegen $\varphi^{\text{ad}}(\varphi^{-1})^{\text{ad}} = (\varphi\varphi^{-1})^{\text{ad}} = \text{id}_V^{\text{ad}} = \text{id}_V$.

11.3.4 adjungierte Matrix

Seien $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $B' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ Basen von V bzw. W und $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$. Dann gilt:

$$M(\varphi, B, B')G_{B'}(g) = G_B(f)\overline{M(\varphi^{\text{ad}}, B', B)}^t$$

Sind B und B' Orthogonalbasen, so gilt:

$$M(\varphi, B, B') = \overline{M(\varphi^{\text{ad}}, B', B)}^t$$

BEWEIS: Sei $n := \dim V$ und $m := \dim W$. Seien

$$\begin{aligned}(a_{ij})_{n \times m} &:= M(\varphi, B, B') & (f_{ij})_{n \times n} &:= G_B(f) \\ (a'_{ij})_{m \times n} &:= M(\varphi^{\text{ad}}, B', B) & (g_{ij})_{m \times m} &:= G_{B'}(g)\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}M(\varphi, B, B') \cdot G_{B'}(g) &= \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} g_{kj} \right)_{n \times m} \\ \sum_{k=1}^m a_{ik} g_{kj} &= \sum_{k=1}^m a_{ik} g(v'_k, v'_j) \\ &= g \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} v'_k, v'_j \right) \\ &= g(v_i \varphi, v'_j) \\ &= f(v_i, v'_j \varphi^{\text{ad}}) \\ &= f \left(v_i, \sum_{l=1}^n a'_{jl} v_l \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \overline{a'_{jl}} f(v_i, v_l) \\ &= \sum_{l=1}^n f_{il} \overline{a'_{jl}} \\ G_B(f) \cdot \overline{M(\varphi^{\text{ad}}, B', B)}^t &= \left(\sum_{l=1}^n f_{il} \overline{a'_{jl}} \right)_{n \times m}\end{aligned}$$

Bei Orthonormalbasen sind die Gram'schen Matrizen jeweils gleich der entsprechenden Einheitsmatrix, damit folgt die Behauptung.

BEZEICHNUNG: Sei $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(K)$. Dann heißt $\overline{A}^t \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$ die zu A *adjungierte Matrix*

11.3.5 Determinante, Eigenwerte

Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. Dann gilt:

1. $\det \varphi = \overline{\det \varphi^{\text{ad}}}$
2. $a \in K$ ist genau dann Eigenwert von φ , wenn \bar{a} Eigenwert von φ^{ad} ist.

BEWEIS:

1. Folgt aus (11.3.4) mit Orthonormalbasis.
2. „ \Rightarrow “ Sei a Eigenwert von φ zum Eigenvektor w . Dann ist für alle $v \in V$:

$$f(w, v\varphi^{\text{ad}}) = f(w\varphi, v) = f(aw, v) = af(w, v) = f(w, \bar{a}v)$$

Daraus folgt für alle v :

$$f(w, v\varphi^{\text{ad}} - \bar{a}v) = 0 = f(w, v(\varphi^{\text{ad}} - \bar{a}\text{id}))$$

Damit steht w senkrecht auf $V(\varphi^{\text{ad}} - \bar{a}\text{id})$. Da w Eigenvektor ist, ist $w \neq 0$. V ist regulär, damit ist $V(\varphi^{\text{ad}} - \bar{a}\text{id}) \neq V$. Somit ist die Abbildung $(\varphi^{\text{ad}} - \bar{a}\text{id})$ nicht surjektiv. Mit Dimensionsformel ist

$$\text{Kern}(\varphi^{\text{ad}} - \bar{a}\text{id}) \neq \{0\}$$

Sei $0 \neq v \in \text{Kern}(\varphi^{\text{ad}} - \bar{a}\text{id})$, dann ist v Eigenvektor zum Eigenwert \bar{a} .

„ \Leftarrow “ Sei \bar{a} Eigenwert von φ^{ad} . Wie eben gezeigt, ist $a = \bar{a}$ Eigenwert zu $(\varphi^{\text{ad}})^{\text{ad}} \stackrel{(11.3.3)}{=} \varphi$.

11.3.6 Isomorphismus lin. Abbildungen/Bilinearformen

Sei $B_\alpha(V)$ die Menge der α -Bilinearformen und α die Komplexkonjugation. Die folgende Abbildung ist ein Vektorraum-Isomorphismus:

$$\psi : \text{Hom}(V, V) \rightarrow B_\alpha(V) \text{ mit } \varphi \mapsto f(v, w\varphi^{\text{ad}}) \forall v, w \in V$$

BEWEIS: Sei $f_\varphi := \varphi\psi$. Einfach nachzurechnen: $f_\varphi \in B_\alpha(V)$. Linearität von ψ :

- zu zeigen: $f_{k\varphi} = kf_\varphi$

$$\begin{aligned} f_{k\varphi}(v, w) &= f(v, w(k\varphi)^{\text{ad}}) \stackrel{(11.3.3)}{=} f(v, \bar{k}w\varphi^{\text{ad}}) \\ &= kf(v, w\varphi^{\text{ad}}) = kf_\varphi(v, w) \end{aligned}$$

- analog: $f_{\varphi+\varphi'} = f_\varphi + f_{\varphi'}$

Sei $f_\varphi(v, w) = 0 \forall v, w \in V$. Zu zeigen. $\varphi = 0$, d.h. ψ ist injektiv.

$$\begin{aligned} 0 &= f_\varphi(v, w) = f(v, w\varphi^{\text{ad}}) = f(v\varphi, w) \forall v, w \\ \Rightarrow 0 &= v\varphi \forall v \in V \\ \Rightarrow 0 &= \varphi \end{aligned}$$

Nach (4.1.2) und (9.2.4) ist

$$\dim \text{Hom}(V, V) = \dim \mathcal{M}_{n \times n}(K) = \dim B_\alpha(V)$$

11.4 Normale Abbildungen

11.4.1 Definitionen

In diesem Abschnitt ist V endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} mit Skalarprodukt f . Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. Dann heißt φ

- *normal*, falls $\varphi\varphi^{\text{ad}} = \varphi^{\text{ad}}\varphi$
- *selbstadjungiert* (oder *hermitesch*), falls $\varphi = \varphi^{\text{ad}}$
- *unitär*, falls φ bijektiv und $\varphi^{-1} = \varphi^{\text{ad}}$

Es gilt:

- Die unitären Abbildungen sind genau die f -Isometrien auf V , da

$$f(v, w\varphi^{\text{ad}}) = f(v\varphi, w) = f(v, w) \quad \forall v, w \Rightarrow w = w\varphi^{\text{ad}} \quad \forall w \in V$$

- $H_f(V)$ ist der \mathbb{R} -Vektorraum der selbstadjungierten Abbildungen aus $\text{Hom}(V, V)$, aber kein Vektorraum über \mathbb{C} . Mit $k \in \mathbb{C}, \varphi \in H_f(\mathbb{C})$ ist $(k\varphi)^{\text{ad}} \stackrel{(11.3.3)}{=} \bar{k}\varphi^{\text{ad}} = \bar{k}\varphi$

Matrizen heißen *normal*, *selbstadjungiert* bzw. *unitär*, wenn sie bezüglich einer Orthonormalbasis eine normale, selbstadjungierte bzw. unitäre Abbildung beschreiben.

11.4.2 Kriterium für normale Abbildungen

Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. Dann ist φ normal genau dann, wenn

$$f(v\varphi, w\varphi) = f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}}) \quad \forall v, w \in V$$

BEWEIS:

„ \Rightarrow “

$$f(v\varphi, w\varphi) = f(v, w\varphi^{\text{ad}}\varphi) = f(v, w\varphi^{\text{ad}}\varphi) = f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}})$$

„ \Leftarrow “ Sei $v, w \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(v(\varphi\varphi^{\text{ad}} - \varphi^{\text{ad}}\varphi), w) &= f(v\varphi\varphi^{\text{ad}}, w) - f(v\varphi^{\text{ad}}\varphi, w) \\ &= f(v\varphi, w\varphi) - f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}}) = 0 \end{aligned}$$

Wegen der Regularität ist $v(\varphi\varphi^{\text{ad}} - \varphi^{\text{ad}}\varphi) = 0$, also $\varphi\varphi^{\text{ad}} = \varphi^{\text{ad}}\varphi$.

11.4.3 normale, selbstadjungierte, unitäre Matrizen

Sei $n := \dim V$, $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$, B Orthogonalbasis von V , $A = (a_{ij}) = M(\varphi, B, B)$

1. φ ist normal genau dann, wenn A normal ist, genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \overline{a_{jk}} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ik}} a_{jk} \quad \forall i, j$$

2. φ ist selbstadjungiert genau dann, wenn A selbstadjungiert ist, genau dann, wenn

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \forall i, j$$

3. φ ist unitär genau dann, wenn A unitär ist, genau dann, wenn

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \overline{a_{jk}} = \delta_{ij} \quad \forall i, j$$

11.4.4 Räume der orthogonalen/unitären Bilinearformen

Sei φ der in (11.3.6) definierte Vektorraum-Isomorphismus von $\text{Hom}(V, V)$ in $B_\alpha(V)$.

- $K = \mathbb{R}$: $H_f(V)\psi$ ist der Unterraum der orthogonalen Bilinearformen.
- $K = \mathbb{C}$: $H_f(V)\psi$ ist der Unterraum der unitären Bilinearformen.

11.4.5 Eigenwerte der adjungierten Abbildung

Sei $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$ eine normale Abbildung, v ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert k . Dann ist v Eigenvektor von φ^{ad} zum Eigenwert \bar{k} . Insbesondere sind die Eigenwerte von selbstadjungierten Abbildungen reell.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} & f(v(\varphi^{\text{ad}} - \bar{k} \cdot \text{id}), v(\varphi^{\text{ad}} - \bar{k} \cdot \text{id})) \\ = & f(v\varphi^{\text{ad}} - \bar{k}v, v\varphi^{\text{ad}} - \bar{k}v) \\ = & f(v\varphi^{\text{ad}}, v\varphi^{\text{ad}}) - kf(v\varphi^{\text{ad}}, v) - \bar{k}f(v, v\varphi^{\text{ad}}) + k^2 f(v, v) \\ \stackrel{(11.4.2)}{=} & f(v\varphi, v\varphi) - kf(v, v\varphi) - \bar{k}f(v\varphi, v) + k\bar{k}f(v, v) \\ = & k\bar{k}f(v, v) - k\bar{k}f(v, v) - k\bar{k}f(v, v) + k\bar{k}f(v, v) \\ = & 0 \Rightarrow v\varphi^{\text{ad}} = \bar{k}v \end{aligned}$$

11.4.6 invariante Unterräume

Sei $K = \mathbb{C}$ und φ eine normale Abbildung aus $\text{Hom}(V, V)$. Sei U ein φ -invarianter Unterraum (d.h. $U\varphi \subseteq U$). Dann ist U auch φ^{ad} -invariant und es gilt: $U^\perp\varphi \subseteq U^\perp$.

BEWEIS: Annahme: $U\varphi^{\text{ad}} \subseteq U$. Sei $v \in U^\perp$, $u \in U$. Dann ist

$$f(u, v\varphi) = f(u\varphi^{\text{ad}}, v) = 0 \Rightarrow U^\perp\varphi \subseteq U^\perp$$

Es ist also nur noch der erste Teil zu zeigen. Beweis per Induktion nach $\dim U$.

- Induktionsverankerung: Für $\dim U = 0$ ist nichts zu zeigen, bei $U = \langle u \rangle$ ist u Eigenvektor von φ und damit nach (11.4.5) auch von φ^{ad} .
- Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle φ -invarianten Unterräume kleinerer Dimension.
- Induktionsschritt: Wende (8.4.1) an: Es existiert eine Basis $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ mit $M(\varphi|_U, B, B)$ ist in Jordan-Normalform. Für $U_0 := \langle u_2, \dots, u_m \rangle$ ist $U_0\varphi \subseteq U_0$. Nach Induktion: $U_0\varphi^{\text{ad}} \subseteq U_0$, also auch $U_0^\perp\varphi \subseteq U_0^\perp$. Mit (9.4.3) und (9.4.4) gilt:

$$V = U_0 \perp U_0^\perp \text{ mit } \dim U_0^\perp = \dim V - \dim U_0$$

Mit Dimensionssatz: $\dim U \cap U_0^\perp = 1$, zudem $U = U_0 \perp (U \cap U_0^\perp)$, außerdem

$$(U \cap U_0^\perp)\varphi = \underbrace{U\varphi}_{\subseteq U} \cap \underbrace{U_0^\perp\varphi}_{\subseteq U_0^\perp} = U \cap U_0^\perp$$

Nach Induktion:

$$\begin{aligned} (U \cap U_0^\perp)\varphi^{\text{ad}} &\subseteq U \cap U_0^\perp \\ U\varphi^{\text{ad}} &= (U_0 + (U \cap U_0^\perp))\varphi^{\text{ad}} \\ &= U_0\varphi^{\text{ad}} + (U \cap U_0^\perp)\varphi^{\text{ad}} \\ &\subseteq U_0 + (U \cap U_0^\perp) = U \end{aligned}$$

11.4.7 Orthogonalbasis aus Eigenvektoren

Sei $\varphi \in H_f(V)$. Dann existiert eine Orthonormalbasis von V , die aus Eigenvektoren von φ besteht. Insbesondere ist φ diagonalisierbar.

BEWEIS: Sei B eine Orthonormalbasis von V und $A = M(\varphi, B, B)$. Nach (11.4.3) gilt: $A = \bar{A}^t$. Wir betrachten \mathbb{C}^n mit dem natürlichen Skalarprodukt und der natürlichen Basis B^* . Wähle $\varphi^* \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ so, daß

$M(\varphi^*, B^*, B^*) = A$ ist.

Nach (11.4.3) ist φ^* selbstadjungiert. \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen, also besitzt φ^* einen Eigenwert k . Mit (11.4.5) gilt: k ist reell. Also ist k auch ein Eigenwert von φ . Sei v ein Eigenvektor zu k in V .

Es ist $f(v, v) > 0$, nach $v_1 = \sqrt{f(v, v)}^{-1}$ können wir annehmen: $f(v_1, v_1) = 1$. Nach (11.4.6) ist $\langle v \rangle^\perp \varphi \subseteq \langle v \rangle^\perp =: U$. Dann ist $\varphi|_U$ selbstadjungiert auf U (bezüglich $f|_{U \times U}$).

Nach Induktion können wir annehmen: Es existiert Orthonormalbasis $\{v_2, \dots, v_n\}$ von U , die aus Eigenvektoren von φ besteht. Damit gilt:

$$V = \langle v \rangle \perp \langle v \rangle^\perp = \underbrace{\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle}_{\text{Orthonormalbasis}}$$

11.4.8 Hauptachsentransformation

Sei $K = \mathbb{R}$ und g eine orthogonale Bilinearform auf V (zusätzlich zu f). Dann existiert eine Basis von V , die Orthonormalbasis bezüglich f und Orthogonalbasis bezüglich g ist.

BEWEIS: Nach (11.3.6) und (11.3.3):

$$\exists \varphi \in \text{Hom}(V, V) \text{ mit } g(v, w) = f(v, w\varphi^{\text{ad}}) \forall v, w \in V$$

und nach (11.4.4) ist φ selbstadjungiert. (11.4.7) Es existiert eine Orthonormalbasis B von V die aus Eigenvektoren von φ besteht. Seien $b, b' \in B$. Dann gilt:

$$g(b, b') = f(b, b'\varphi) = f(b, k_{b'}b') = \overline{k_{b'}} f(b, b') = \begin{cases} 0 & \text{falls } b \neq b' \\ \frac{0}{k_{b'}} & \text{falls } b = b' \end{cases}$$

11.4.9 Charakterisierung der normalen Abbildungen über \mathbb{C}

Sei $K = \mathbb{C}$, $\dim V \geq 1$ und $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. Dann sind äquivalent:

- (a) φ ist normal
- (b) Es existiert eine Orthonormalbasis von V , die aus Eigenvektoren von φ besteht, insbesondere ist φ diagonalisierbar.
- (c) Für alle $v \in V$ gilt: $f(v\varphi, v\varphi) = f(v\varphi^{\text{ad}}, v\varphi^{\text{ad}})$

BEWEIS:

(a) \Rightarrow (b) Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, besitzt φ einen Eigenwert a . Sei v ein Eigenvektor zu diesem Eigenwert und $W := \langle v \rangle^\perp$. Nach (9.4.4) ist $V = \langle v \rangle \perp W$, und nach (11.4.6) ist $W\varphi \leq W$. Mit Induktion nach $\dim V$ können wir annehmen, daß eine Orthonormalbasis von W existiert, die aus Eigenvektoren von φ besteht. Nimmt man $\sqrt{f(v, v)}^{-1} \cdot v$ zu dieser Basis hinzu, erhält man (b).

(b) \Rightarrow (c) Sei B eine Orthonormalbasis von V , die aus Eigenwerten von φ besteht, und seien $k_b \in K$, $b \in B$ und $v = \sum_{b \in B} k_b b$. Dann ist

$$f(v\varphi, v\varphi) = \sum_{b \in B} k_b \overline{k_b} a_b \overline{a_b} \quad (*)$$

wobei a_b der Eigenwert zum Eigenvektor b ist. Als nächstes zeigen wir, daß $b \in B$ auch Eigenvektor von φ^{ad} zum Eigenwert $\overline{a_b}$ ist. Man beachte, daß

$$f(b, b'\varphi^{\text{ad}}) = f(b\varphi, b') = a_b f(b, b') \quad \forall b, b' \in B$$

Sei wieder $v = \sum_{b \in B} k_b b$. Dann gilt:

$$f(v, b'\varphi^{\text{ad}}) = \sum_{b \in B} k_b f(b, b'\varphi^{\text{ad}}) = k_{b'} a_{b'} = f(v, \overline{a_{b'}} b')$$

und aus der Regularität von V folgt $b'\varphi^{\text{ad}} = \overline{a_{b'}} b'$, d.h. b' ist Eigenvektor von φ^{ad} für alle $b' \in B$. Aus (*) folgt nun:

$$f(v\varphi, v\varphi) = \sum_{b \in B} k_b \overline{k_b} a_b \overline{a_b} = f(v\varphi^{\text{ad}}, v\varphi^{\text{ad}}) \quad \forall v \in V$$

(c) \Rightarrow (a) Seien $v, w \in V$. Dann gilt:

$$f((v+w)\varphi, (v+w)\varphi) = f(v\varphi, v\varphi) + f(v\varphi, w\varphi) + f(w\varphi, v\varphi) + f(w\varphi, w\varphi)$$

und

$$f((v+w)\varphi^{\text{ad}}, (v+w)\varphi^{\text{ad}}) = f(v\varphi^{\text{ad}}, v\varphi^{\text{ad}}) + f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}}) + f(w\varphi^{\text{ad}}, v\varphi^{\text{ad}}) + f(w\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}})$$

also

$$\begin{aligned} f(v\varphi, w\varphi) + f(w\varphi, v\varphi) &= f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}}) + f(w\varphi^{\text{ad}}, v\varphi^{\text{ad}}) \\ &= f(v\varphi, w\varphi) + \overline{f(v\varphi, w\varphi)} \\ &= f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}}) + \overline{f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}})} \\ &= 2\Re(f(v\varphi, w\varphi)) = 2\Re(f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}})) \end{aligned}$$

Mit $v + iw$ an Stelle von $v + w$ erhalten wir mit dem gleichen Argument

$$2\Im(f(v\varphi, w\varphi)) = 2\Im(f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}}))$$

Daraus folgt $f(v\varphi, w\varphi) = f(v\varphi^{\text{ad}}, w\varphi^{\text{ad}})$ und mit (11.4.2) folgt (a).

11.4.10 Charakterisierung der selbstadjungierten Abbildungen über \mathbb{C}

Sei $K = \mathbb{C}$ und $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. Dann sind äquivalent:

- (a) φ ist selbstadjungiert
- (b) φ ist normal, und alle Eigenwerte von φ sind reell.
- (c) Für alle $v \in V$ gilt: $f(v\varphi, v) \in \mathbb{R}$

BEWEIS:

(a) \Rightarrow (b) Folgt aus (11.4.5)

(b) \Rightarrow (c) Nach (11.4.9) existiert eine Orthonormalbasis B von V , die aus Eigenvektoren von φ besteht. Sei $v \in V$ und a_b der Eigenwert zu $b \in B$. Es existieren $k_b \in K$, $b \in B$ mit $v = \sum_{b \in B} k_b b$. Daraus folgt

$$f(v\varphi, v) = f\left(\sum_{b \in B} k_b b\varphi, \sum_{b \in B} k_b b\right) = \sum_{b \in B} a_b k_b \overline{k_b} \in \mathbb{R}$$

(c) \Rightarrow (a) Seien $v, w \in V$. Dann ist

$$f((v+w)\varphi, v+w) = f(v\varphi, v) + f(w\varphi, w) + f(v\varphi, w) + f(w\varphi, v)$$

und aus $f((v+w)\varphi, v+w)$, $f(v\varphi, v)$, $f(w\varphi, w) \in \mathbb{R}$ folgt:

$$f(v\varphi, w) + f(w\varphi, v) \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Aus (*), angewandt auf v und iw , folgt $i(-f(v\varphi, w) + f(w\varphi, v)) \in \mathbb{R}$. Deshalb ist

$$\Im(f(v\varphi, w)) = -\Im(f(w\varphi, v)) \text{ und } \Re(f(v\varphi, w)) = \Re(f(w\varphi, v))$$

Also ist $f(v\varphi, w) = \overline{f(w\varphi, v)}$. Insbesondere ist nun

$$f(v\varphi, w) = \overline{f(w\varphi, v)} = f(v, w\varphi) = f(v\varphi^{\text{ad}}, w)$$

Aus der Regularität von V folgt $\varphi = \varphi^{\text{ad}}$.

11.4.11 Charakterisierung der unitären Abbildungen über \mathbb{C}

Sei $K = \mathbb{C}$ und $\varphi \in \text{Hom}(V, V)$. Dann sind äquivalent:

- (a) φ ist unitär
- (b) φ ist normal, und für jeden Eigenwert a von φ gilt: $a\bar{a} = 1$.
- (c) Für alle $v \in V$ gilt: $f(v\varphi, v\varphi) = f(v, v)$

BEWEIS:

(a) \Rightarrow (b) Sei a Eigenwert von φ zum Eigenvektor v . Dann gilt wegen (11.4.5):

$$\bar{a}v = v\varphi^{\text{ad}} = v\varphi^{-1} = a^{-1}v \Rightarrow a\bar{a} = 1$$

(b) \Rightarrow (c) Nach (11.4.9) existiert eine Orthonormalbasis B von V , die aus Eigenvektoren von φ besteht. Sei $v \in V$ und a_b der Eigenwert von $b \in B$. Es existieren $k_b \in K, b \in B$ mit $v = \sum_{b \in B} k_b b$. Deshalb gilt:

$$f(v\varphi, v\varphi) = f\left(\sum_{b \in B} k_b k_b \varphi, \sum_{b \in B} k_b k_b \varphi\right) = \sum_{b \in B} k_b \bar{k}_b a_b \bar{a}_b = \sum_{b \in B} k_b \bar{k}_b \bar{b} = f(v, v)$$

(c) \Rightarrow (a) Seien $v, w \in V$. Dann folgt aus $f((v+w)\varphi, (v+w)\varphi) = f(v+w, v+w)$:

$$f(v\varphi, w\varphi) + f(w\varphi, v\varphi) = f(v, w) + f(w, v) \quad (*)$$

Aus (*), angewandt auf v, iw folgt außerdem:

$$-f(v\varphi, w\varphi) + f(w\varphi, v\varphi) = -f(v, w) + f(w, v)$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} f(v\varphi, w\varphi) + \overline{f(v\varphi, w\varphi)} &= f(v, w) + \overline{f(v, w)} \\ \text{und } -f(v\varphi, w\varphi) + \overline{f(v\varphi, w\varphi)} &= -f(v, w) + \overline{f(v, w)} \end{aligned}$$

und damit

$$\Re(f(v\varphi, w\varphi)) = \Re(f(v, w)) \text{ und } \Im(f(v\varphi, w\varphi)) = \Im(f(v, w))$$

Damit $f(v\varphi, w\varphi) = f(v, w) = f(v\varphi\varphi^{\text{ad}}, w)$. Aus der Regularität von V folgt: $\varphi^{-1} = \varphi^{\text{ad}}$.

11.4.12 Quadratische Gleichungen mit mehreren Variablen

- allgemein: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ bzw.

$$xAx^T + xb^T + c_0 = 0$$

- Ellipse/Kreis: $x^2 + a^2y^2 = 1$
- Hyperbel: $x^2 - y^2 = 1$
- Parabel: $y^2 = x$
- zwei Geraden: $x^2 - a^2y^2 = 0$
- Koordinatentransformation: $x' = xC$ mit $C \in O_n(K)$, dann

$$x'CAC^t x' + x'Cb^T + c_0 = 0$$

$q_A : V \rightarrow K$ mit $x \mapsto xAx^T$ (wobei $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$), dann (mit f Bilinearform):

$$q_A(v + w) = q_A(v) + q_A(w) + f(v, w)$$

$g(u, v) = uAv^T$, mit (11.4.8) existiert B , welche bezüglich f Orthonormalbasis, bezüglich g Orthogonalbasis ist.

SATZ: Jede quadratische Gleichung mit n Unbestimmten ist zu einer quadratischen Gleichung der Form

$$\sum a_i x_i^2 + \sum x_i b_i + c_0 = 0$$

äquivalent. Insbesondere kann $b_i = 0$ gewählt werden, falls $a_i \neq 0$.

Bei $n = 2$:

- $a_1x^2 + a_2y^2 + c_0 = 0$ Ellipse, Hyperbeln, Punktspiegelung, Geradenpaare, \emptyset
- $a_1x^2 + b_2y + c_0 = 0$ Parabeln
- $(b_1x + b_2y + c_0 = 0$ Gerade)

Bei $n = 3$: $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla A \nabla^T$$

Index

- Abbildungen
 - adjungiert
 - selbstadjungiert, 75
 - adjungierte, 71
 - normal, 75
 - unitär, 75
- anisotrop, 46
- Annulator, 2
- Annulatorideal, 2
- Automorphismus
 - Körper, 26
- Basis
 - orthogonal, 37
 - orthonormal, 37
- Bilinearformen, 27
 - äquivalent, 42
 - α -Bilinearform, 27
 - hermitesch, 40
 - Index, 59
 - orthogonal, 40
 - regulär, 28
 - Bedingung, 37
 - schiefsymmetrisch, 40
 - symmetrisch, 40
 - symplektisch, 40
 - unitär, 40
- Caley-Hamilton, Satz, 15
- diagonalisierbar, 9
- Dimensionssätze
 - orthogonal, 38
 - senkrecht, 32
- direkte Summe, 5
- dual
 - duale Basis, 31
 - dualer Vektorraum, 30
 - Dualitätssatz, 34
- Eigenraum, 4
- Eigenvektor, 4
- Eigenwert, 4
- Gram'sche Matrix, 28
- Hauptachsentransformation, 78
- hyperbolisch
 - hyperbolisch Ebene, 46
 - hyperbolisches Paar, 46
- Ideal, 1
- invariant, 12
- Isometrie, 51
 - Spiegelung, 52
 - Transvektion, 53
- isometrisch, 51
- isotrop, 46
- Körper
 - algebraisch abgeschlossen, 24
 - Automorphismus, 26
- Komplexe Zahlen, 26
 - Konjugation, 26
- Linearfunktionen, 30
- Matrizen
 - adjungierte, 73
 - Gram'sche Matrix, 28
 - Normalform
 - allgemeine, 23
 - Jordansche, 24
- Normalform
 - allgemeine, 23
 - Jordansche, 24
- ortho-
 - orthogonal, 37
 - orthonormal, 37

orthosymmetrisch, 37

Polynom
 charakteristisch, 10
 Nullstellen, 12
 Minimalpolynom, 2
 Nullstellen, 3

Polynomring, 1

Räume
 dualer Raum, 30
 duale Basis, 31
 nicht ausgeartet, 28
 Norm, 67
 induziert, 67
 Radikal, 37
 regulär, 37
 Skalarprodukt
 auf \mathbb{C}^n , 27
 auf \mathbb{R}^n , 27
 Unterräume
 φ -invariant, 12
 φ -unzerlegbar, 16
 φ -zyklisch, 16
 anisotrop, 46
 isotrop, 46
 senkrecht, 32

Radikal, 37

Ringhomomorphismus, 1

senkrecht, 37

Skalarprodukt, 27

teilerfremd, 7

unzerlegbar, 16

zyklisch, 16