Einführung in die mathematische Logik

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teweilse **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

Hinweis

Buch als Script zur Vorlesung: EBBINGHAUS, FLUM, THOMAS: Einführung in die mathematische Logik; Hochschul-Taschenbuch, Spektrum-Verlag

1 Aussagenlogik

1.1 Grundlagen

- Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Menge. Eine *endliche Folge* über $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $s : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathcal{A}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

  Falls dabei $n = 0$, so ist s die leere Folge, auch mit $\emptyset$ bezeichnet (die leere Folge ist dasselbe Objekt wie die leere Menge). Dann ist n die Länge von s. Anstelle von s schreiben wir etwas expliziter $\langle s(0), \ldots, s(n-1)\rangle$ oder auch nur $s(0) \ldots s(n-1)$.

- Die Menge aller Folgen über $\mathcal{A}$ der Länge n wird mit $\mathcal{A}^n$ bezeichnet und heißt das *n-fache karthesische Produkt* von $\mathcal{A}$. Also $\mathcal{A}^0 = \{\emptyset\}$.

  Die Menge aller endlichen Folgen über $\mathcal{A}$ wird mit $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ bezeichnet, also

  $$\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$$

- Falls X eine beliebige Menge ist, wird mit $\mathcal{A}^X$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathcal{A}$ bezeichnet. Z.B. ist $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller unenedlichen Folgen über $s : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$.

- Seien $s : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathcal{A}$ und $t : \{0, \ldots, m-1\} \to \mathcal{A}$ endliche Folgen über $\mathcal{A}$. Dann heißt s *(echtes) Anfangsstück* von t, falls $n \leq m$ (bei echtem Anfangsstück $n < m$) und $s(i) = t(i)$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

  Weiter heißt s *Teilfolge* von t, falls eine Folge $\langle i_0, \ldots, i_{n-1}\rangle$ existiert mit $0 \leq i_0 < \ldots < i_{n-1} \leq m-1$ und $s(j) = t(i_j)$ für alle $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ (Dann ist also $n \leq m$).

  Weiter heißt t *Intervall* von s, falls $k \leq n-1$ existiert, so daß $t(i) = s(k+i)$ für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ (dann ist also $k + m \leq n$).

1.2 Die Sprache der Aussagenlogik

1.2.1 Alphabet, Formeln, Rang

- Sei $\mathcal{A}$ das folgende *Alphabet*: Seine Buchstaben sind:

  - Aussagenvariablen: $A_0, \ldots, A_n, \ldots$ (mit $n \in \mathbb{N}$)
  - Junktoren: $\wedge$, $\vee$, $\neg$
  - Klammern: (,)

  Also ist $\mathcal{A} = \{\wedge, \vee, \neg, (,), A_0, \ldots, A_n, \ldots\}$.

- Ein *Wort* über $\mathcal{A}$ ist eine endliche Folge über $\mathcal{A}$. Die Menge aller Wörter über $\mathcal{A}$ ist somit $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$. Wir definieren nun, was „sinnvolle“ Wörter sein sollen, diese nennen wir *Formeln* (der Aussagenlogik):

  Definition[1]: *Formeln der Aussagenlogik* sind folgendermaßen definiert:

  1. Alle Aussagenvariablen (A_0, A_1, ...) sind Formeln, sogenannten *Primformeln*.
  2. Sind α und β Formeln, so auch $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $\neg\alpha$

  Mit $\mathcal{F}$ bezeichnen wir die Menge aller Formeln der Aussagenlogik. Eine präzisere Definition ist die folgende:

- **Definition:** Rekursiv definieren wir die Mengen $\mathcal{F}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

  1. Sei $\mathcal{F}(0) = \{\, A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
  2. Falls $\mathcal{F}(0), \ldots, \mathcal{F}(n)$ schon definiert sind, sei $\mathcal{F}(n+1)$ die Menge all jener Wörter γ über α mit der Eigenschaft, daß $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(0) \cup \ldots \cup \mathcal{F}(n)$ existieren, so daß entweder

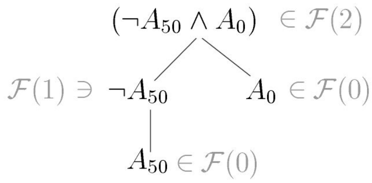
  $$\gamma = (\alpha \wedge \beta) \text{ oder } \gamma = (\alpha \vee \beta) \text{ oder } \gamma = \neg\alpha$$

- Offensichtlich ist dann $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}(n)$, das heißt: Ein Wort $\gamma \in \alpha^{<\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Formel, falls $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\gamma \in \mathcal{F}(n)$.

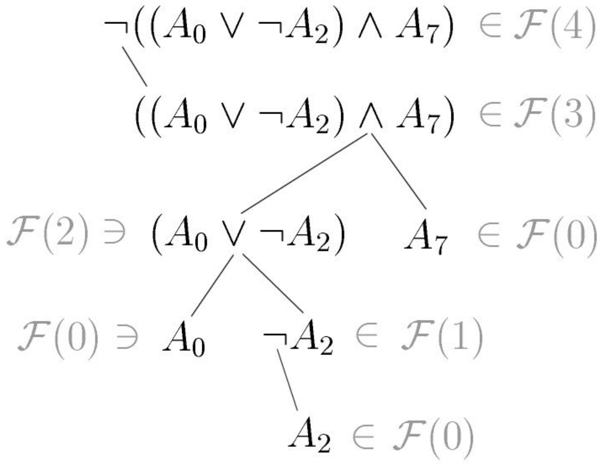
  Das kleinste solche n heißt der *Rang* der Formel γ. Er ist ein Maß für die Komplexität von γ. Er gibt an, wie oft man Operationen aus (2) *hintereinander* ausführen muß, um γ aus den Primformeln zu erzeugen.

[1] Dies ist ein erstes Beispiel einer rekursiven Definition. So zu verstehen: Formeln sind genau jene Wörter, die man - ausgehend von den unter (1) genannten Primformeln - mittels wiederholter Anwendung der Regel (2) erhalten kann.

- Das optische Äquivalent zum Rang sind *Baumdiagramme*, Beispiele:
  - Die Formel $\gamma = (\neg A_{50} \wedge A_0)$ hat den Rang 2.



  - Die Formel $\gamma = \neg((A_0 \vee \neg A_2) \wedge A_7)$ hat den Rang 4.



Wenn man zeigen möchte, daß die Menge aller Formeln eine gewisse Eigenschaft hat, geht das i.a. nur durch Induktion über den Rang.

1.2.2 Eindeutigkeit des Formelaufbaus

(1) Lemma: Jede Formel hat gleich viele Links- wie Rechtsklammern.

Beweis: Induktion über den Rang.

- Induktionsverankerung: Sei $\alpha \in \mathcal{F}(0)$, also existiert n mit $\alpha = A_n$. Behauptung klar.
- Induktionsschritt: Sei die Behauptung bewiesen für Formeln vom Rang höchstens n. Sei $\gamma \in \mathcal{F}(n+1)$.
  1. Falls $\gamma = \neg\alpha$ für ein $\alpha \in \mathcal{F}(0) \cup \ldots \cup \mathcal{F}(n)$. Behauptung gilt für α, somit auch für γ.

2. Falls $\gamma = (\alpha \wedge \beta)$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(0) \cup \ldots \cup \mathcal{F}(n)$. Behauptung gilt für α und β. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{ALK}(\gamma) &= 1 + \text{ALK}(\alpha) + \text{ALK}(\beta) \\ &\overset{\text{IndV}}{=} 1 + \text{ARK}(\alpha) + \text{ARK}(\beta) \\ &= \text{ARK}(\gamma) \end{aligned}$$

3. Falls $\gamma = (\alpha \vee \beta)$ analog. □

(2) Lemma:

1. Sei α eine Formel der Gestalt $(\beta \wedge \gamma)$ oder $(\beta \vee \gamma)$ für gewisse $\beta, \gamma \in \mathcal{F}$. Dann enthält jedes nichtleere echte Anfangsstück von α mehr Linksklammern als Rechtsklammern.
2. Sei $\alpha = \neg\beta$ für ein gewisses $\beta \in \mathcal{F}$. Dann enthält jedes Anfangsstück von α mindestens so viele Linksklammern wie Rechtsklammern.

Beweis: Mit Induktion über den Rang von α beweisen wir die Aussage „(1) und (2)“.

- Induktionsverankerung: Sei $\text{Rang}(\alpha) = 0$. Nicht zu zeigen, da Primformeln nicht von dieser Gestalt sind.
- Induktionsannahme: Sei nun „(1) und (2)“ bewiesen für Formeln mit Rang $\leq n$.
- Induktionsschritt: Sei nun $\text{Rang}(\alpha) = n + 1$ Es existieren nun $\beta, \gamma \in \mathcal{F}0 \cup \ldots \cup \mathcal{F}n$, so daß entweder $\alpha = (\beta \vee \gamma)$ oder $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ oder $\alpha = \neg\beta$. Die Behauptung „(1) und (2)“ gilt somit für β und γ. Fallunterscheidung:

  1. Fall $\alpha = (\beta \vee \gamma)$: Sei s ein echtes nichtleeres Anfangsstück von α. Zu zeigen ist: s enthält mehr Links- als Rechtsklammern. Es bestehen die folgenden Möglichkeiten:
     (a) $s = ($. Klar!
     (b) $s = (s'$, wobei s' ein nichtleeres Anfangsstück von β ist. Nach Induktionsvoraussetzung (für β) enthält s' mindestens so viele Links- wie Rechtsklammern. Die Behauptung für s folgt.
     (c) $s = (\beta\vee$. Nach Lemma (1) enthält β gleichviele Links- und Rechtsklammern, damit folgt die Behauptung.

(d) $s = (\beta \vee s'$, wobei s' ein nichtleeres Anfangsstück von γ ist. Nach Lemma (1) enthält β gleichviele Links- und Rechtsklammern, nach Induktionsvoraussetzung (für β) enthält s' mindestens so viele Links- wie Rechtsklammern. Die Behauptung für s folgt.

2. Fall: $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$: analog.
3. Fall: $\alpha = \neg\beta$: Sei s ein nichtleeres echtes Anfangsstück von α. Zu zeigen ist: s enthält mindestens so viele Links- wie Rechtsklammern. Es bestehen die folgenden Möglichkeiten:
   (a) $s = \neg$. Klar!
   (b) $s = \neg s'$, wobei s' ein nichtleeres Anfangsstück von β ist. Nach Induktionsvoraussetzung (für β) enthält s' mindestens so viele Links- wie Rechtsklammern. Die Behauptung für s folgt. □

(3) Lemma: Falls $\neg\alpha$ eine Formel ist, so auch α.

Beweis: $\neg\alpha$ ist weder Primformel, noch von der Gestalt $(\beta \wedge \gamma)$ oder $(\beta \vee \gamma)$. Somit existiert eine Formel δ, so daß $\neg\alpha = \neg\delta$. Es folgt $\alpha = \delta$. □

(4) Korollar: Kein echtes Anfangsstück einer Formel ist eine Formel.

Beweis: Mit Induktion über den Rang von α.

- Induktionsverankerung: Sei $\mathrm{Rang}(\alpha) = 0$. Nicht zu zeigen, da echte Anfangsstücke von Primformeln leer sind.
- Induktionsschritt: Sei $\mathrm{Rang}(\alpha) = n + 1$ und die Behauptung bewiesen für Formeln mit Rang $\leq n$. Sei s ein nichtleeres, echtes Anfangsstück von α. Fallunterscheidung:
  1. Fall: α ist Konjunktion oder Disjunktion, enthält also s nach Lemma (2) mehr Links- als Rechtsklammern und ist damit nach Lemma (1) keine Formel.
  2. Fall: $\alpha = \neg\beta$ für ein β mit $\mathrm{Rang}(\beta) \leq n$, wir können schreiben: $s = \neg s'$, wobei s' ein echtes Anfangsstück von β ist. Wäre s eine Formel, so wegen Lemma (3) auch s', ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung für β. □

(5) Satz: Eindeutigkeit des Formelaufbaus: Sei α eine Formel. Dann gilt genau eine der folgenden drei Aussagen:

1. $\alpha = A_n$ für ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$.
2. $\alpha = \neg\beta$ für eine eindeutig bestimmte Formel β.

3. $\alpha = (\beta \circ \gamma)$ für eindeutig bestimmte Formeln β, γ und Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee\}$.

Beweis: Klarerweise schließen sich (1), (2) und (3) gegenseitig aus.

1. Fall: $\alpha = A_n$ ist eine Primformel, klarerweise ist A_n eindeutig bestimmt.
2. Fall: $\alpha = \neg\beta$ für ein Wort β, β ist somit eindeutig bestimmt und nach Lemma (3) auch eine Formel.
3. Fall: Es existieren Formeln β und γ sowie ein Junktor $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, so daß $\alpha = (\beta \circ \gamma)$. Angenommen, es gäbe noch Formeln β' und γ' sowie einen Junktor $\circ' \in \{\wedge, \vee\}$, so daß $\alpha = (\beta' \circ' \gamma')$.

   Offensichtlich ist dann β Anfangsstück von β' oder umgekehrt. Da β und β' beides Formeln sind, folgt $\beta = \beta'$ mit Korollar (4). Aus $(\beta \circ \gamma) = (\beta' \circ' \gamma')$ folgt dann $\circ = \circ'$ und $\gamma) = \gamma')$, folglich $\gamma = \gamma'$. □

Dieser Satz wird sehr oft eingesetzt, um rekursive Funktionen auf der Menge aller Formeln zu definieren.

1.2.3 Definieren rekursiver Funktionen

- **Definition:** Eine *Subformel* einer Formel α ist ein Intervall von α, das selbst eine Formel ist.

  Beispiel:

  – In $\neg((A_{50} \vee (\neg A_0 \wedge A_7)) \wedge A_2)$ sind folgende Subformeln enthalten: $A_0, A_2, A_7, A_{50}, \neg A_0, (\neg A_0 \wedge A_7), (A_{50} \vee (\neg A_0 \wedge A_7)), ((A_{50} \vee (\neg A_0 \wedge A_7)) \wedge A_2), \neg((A_{50} \vee (\neg A_0 \wedge A_7)) \wedge A_2)$

  – Sei $\alpha = \neg(\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_0))$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
Sf(A) &= Sf((\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_0))) \cup \{\alpha\} \\
&= Sf(\neg A_0) \cup Sf((A_1 \wedge \neg A_0)) \cup \{(\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_0)), \alpha\} \\
&= Sf(A_0) \cup Sf(A_1) \cup Sf(\neg A_0) \cup \{(\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_0)), \alpha, \neg A_0, (A_1 \vee \neg A_0)\} \\
&= Sf(A_0) \cup \{(\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_0)), \alpha, \neg A_0, (A_1 \vee \neg A_0), A_0, A_1\} \\
&= \{A_0, A_1, \neg A_0, (A_1 \vee \neg A_0), (\neg A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_0)), \alpha\}
\end{aligned}
$$

- Wir definieren rekursiv eine Funktion Sf auf $\mathcal{F}$ wie folgt:

$$
Sf(\alpha) = \begin{cases} \{\alpha\} & \text{falls} \quad \alpha = A_n \\ \{\alpha\} \cup Sf(\beta) & \text{falls} \quad \alpha = \neg\beta \\ \{\alpha\} \cup Sf(\beta) \cup Sf(\gamma) & \text{falls} \quad \alpha = (\beta \circ \gamma) \end{cases}
$$

Behauptung: Für $\alpha \in \mathcal{F}$ ist $Sf(\alpha)$ die Menge aller Subformeln von α.

Beweis: Die Richtung „$\subseteq$“ ist klar. Die Richtung „$\supseteq$“: Fallunterscheidung:

1. Fall: $\alpha = A_n$: klar!
2. Fall: $\alpha = \neg\beta$: Intervalle von α, die nicht Intervalle von β sind und verschieden von α sind, haben die Gestalt $\neg s$, wobei s ein echtes Anfangsstück von β ist. Nach Korollar (4) ist somit s keine Formel, also nach Lemma (3) auch $\neg s$ nicht.
3. Fall: $\alpha = (\beta \vee \gamma)$: Sei s ein Intervall von α, das nicht Intervall von β oder γ ist und verschieden von α ist. Also haben wir folgende Fälle:
   (a) $s = s'\vee$ oder $s = \vee s'$ (mit s' Endstück von β bzw. Anfangsstück von γ): Dann ist s keine Formel nach deren Definition.
   (b) $s = (s'$ oder $s = s')$ (mit s' ein Anfangs- oder Endstück von $\beta \vee \gamma$): Dann ist s keine Formel wegen der Anzahl der Klammern.
   (c) $s = t_0 \vee t_1$ (mit t_0 nichtleeres Endstück von β und t_1 ein nichtleeres Anfangsstück von γ): Wäre $t_0 = \beta$, so ist die Formel β ein echtes Anfangsstück und damit s keine Formel. Also ist t_0 echtes Endstück von β.

   Sei u das Anfangsstück von β, das man erhält, wenn man hinten t_0 wegstreicht. Somit ist $\beta = ut_0$ und $u \neq \emptyset$. Falls u mit einer nichtleeren Folge von $\neg$ beginnt, so erhalte u' aus u durch Wegstreichen all dieser, sonst sei $u' = u$. Bemerke, daß $u' \neq \emptyset$, da sonst t_0 eine Formel wäre (Lemma (3)).

   Nun muß u' mit (beginnen (da es nicht mit A_n, $\wedge$ oder $\vee$ beginnen kann). Somit ist $u't_0$ eine Formel, die mit (beginnt, ist also eine Kon- oder Disjunktion. Also hat t_0 mehr Rechts- als Linksklammern, kann also nach Lemma (1), (2) nicht Anfangsstück einer Formel sein. Somit ist s keine Formel. □

- **Behauptung:** Für $\alpha \in \mathcal{F}$ ist $\mathrm{Prim}(\alpha)$ die Menge aller Primformeln von α.

  Beweis: Fallunterscheidung: (siehe Übung)

- Wir definieren eine Funktion $\mathcal{P}$ auf $\mathbb{N}$ durch

$$\mathcal{P}(n) := \{\alpha \in \mathcal{F} \mid \mathrm{Prim}(\alpha) \subseteq \{A_0, \dots, A_n\}\}$$

Dann enthält $\mathcal{P}(n)$ Formeln von beliebig großem Rang (für alle n), beispielsweise:

$$\{A_0, \neg A_0, \neg\neg A_0, (A_0 \wedge A_0), (A_0 \wedge (A_0 \wedge A_0))\} \subseteq \mathcal{P}(0)$$

1.2.4 Vereinfachungen und Vereinbarungen

- Schreibweisen:

$$\begin{array}{rll} (\alpha \rightarrow \beta) & \text{anstelle von} & (\neg\alpha \vee \beta) \\ (\alpha \leftrightarrow \beta) & \text{anstelle von} & ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \\ (\alpha \uparrow \beta) & \text{anstelle von} & (\neg\alpha \vee \neg\beta) \end{array}$$

- Sprechweisen:

$\wedge$	wird gelesen als	*„und"*
$\vee$	wird gelesen als	*„oder"*
$\rightarrow$	wird gelesen als	*„impliziert"*
$\leftrightarrow$	wird gelesen als	*„ist äquivalent zu"*
$\uparrow$	wird gelesen als	*„nicht zugleich"*

- Wir lassen darüberhinaus manche Klammerpaare weg, insbesondere Außenklammern, so schreiben wir oft $\alpha \vee \beta$ anstelle von $(\alpha \vee \beta)$.

1.3 Semantik der Aussagenlogik

1.3.1 Wahrheitstafeln, Wahrheitswertbelegung

- Die Formeln der Aussagenlogik und insbesondere schon die Primformeln werden als *Aussagen* gedeutet (= Äußerung eines Sachverhalts). Wir sind hier nur interessiert am Wahrheitswert solcher Aussagen. Mittels *Wahrheitstafeln* werden wir festlegen, wie der Wahrheitswert einer Formel berechnet wird, ausgehend von den Wahrheitswerten der darin enthaltenen Primformeln. Wir führen die folgenden Funktionen (Wahrheitstafeln) ein:

$$\neg : \{W, F\} \rightarrow \{W, F\} \text{ mit } \neg(W) = F \text{ und } \neg(F) = W$$

$$\wedge : \{W, F\}^2 \rightarrow \{W, F\} \text{ und } \vee : \{W, F\}^2 \rightarrow \{W, F\}$$

Die zugehörigen Wahrheitstafeln:

	$\neg$
W	F
F	W

		$\wedge$	$\vee$
W	W	W	W
F	W	F	W
W	F	F	W
F	F	F	F

- **Definition:** Eine Abbildung $w : \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \{W, F\}$ wird eine *Wahrheitswertbelegung* (WWB) genannt. Mithilfe der Wahrheitstafeln können wir eine Wahrheitswertbelegung zu einer Funktion $w^* : \mathcal{F} \to \{W, F\}$ fortsetzen[2]: Definiere rekursiv (unter Verwendung von Satz (1.2.2)) für $\alpha \in \mathcal{F}$:

$$w^*(\alpha) = \begin{cases} w(A_n) & \text{falls} \quad \alpha = A_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ \neg(w^*(\beta)) & \text{falls} \quad \alpha = \neg\beta \text{ für ein } \beta \in \mathcal{F} \\ \wedge(w^*(\beta), w^*(\gamma)) & \text{falls} \quad \alpha = (\beta \wedge \gamma) \text{ für gewisse } \beta, \gamma \in \mathcal{F} \\ \vee(w^*(\beta), w^*(\gamma)) & \text{falls} \quad \alpha = (\beta \vee \gamma) \text{ für gewisse } \beta, \gamma \in \mathcal{F} \end{cases}$$

  Analog können wir eine partielle Wahrheitswertbelegung $v : \{A_0, \ldots, A_n\} \to \{W, F\}$ fortsetzen auf die Menge $\mathcal{P}(n)$.

- **Übung** (Koinzidenzlemma der Aussagenlogik): Seien w, v (möglicherweise partielle) Wahrheitswertbelegungen mit $w|_{\{A_0,\ldots,A_n\}} = v|_{\{A_0,\ldots,A_n\}}$. Dann gilt $w^*(\alpha) = v^*(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathcal{P}(n)$ (Zeige dies durch Induktion über Rang(α)).

1.3.2 Semantische Äquivlanenzen und Implikationen, verifizier- und falsifizierbar, Tautologie und Kontradiktion

- **Definitionen:** Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$.

  1. α und β heißen *semantisch äquivalent*, falls $w^*(\alpha) = w^*(\beta)$ für jede Wahrheitswertbelegung w. Wir schreiben $\alpha \Leftrightarrow \beta$.
  2. α *impliziert semantisch* β, falls für jede Wahrheitswertbelegung w gilt: Falls $w^*(\alpha) = W$, so $w^*(\beta) = W$. Wir schreiben: $\alpha \Rightarrow \beta$.
  3. α heißt *erfüllbar* (oder auch *verifizierbar*) bzw. *falsifizierbar*, falls mindestens eine Wahrheitswertbelegung w existiert mit $w^*(\alpha) = W$ bzw. $w^*(\alpha) = F$.

[2]wobei „fortsetzen“ bedeutet: $w^*(A_n) = w(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

4. α heißt *Tautologie* bzw. *Widerspruch* (oder auch *Kontradiktion*), falls α nicht falsifizierbar bzw. nicht verifizierbar ist.

- **Beispiele:** Für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$ gelten:

  1. (a) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ und
     $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (Assoziativität)
     (b) $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$ und
     $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$ (Kommutativität)
     (c) $\alpha \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$ und
     $\alpha \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha$
     (d) $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha$ und
     $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha$
     (e) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ und
     $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
     (f) $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ und
     $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (Regeln von DeMorgan)
     (g) $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$
  2. (a) $\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$
     (b) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$ und $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$
  4. (a) $(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$ ist Tautologie
     (b) $\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$ ist Widerspruch

- **Beweis:** (nur exemplarisch)

  1. (e) Beweis durch Wahrheitstafeln mit allen Möglichkeiten:

α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \gamma$	$\beta \vee \gamma$	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	W	W	W
W	F	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	F	F	F	F
F	W	W	F	F	W	F	F
F	W	F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- **Bemerkungen:** Wegen der Assoziativität schreiben wir $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ anstelle von $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$ bzw. $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$, ebenso mit $\vee$. Etwas allgemeiner schreiben wir $\bigwedge_{i \leq n} \alpha_i$ und $\bigvee_{i \leq n} \alpha_i$.

1.3.3 (assoziierte) Boole'sche Funktionen

- **Definition:** Eine Funktion $f : \{W, F\}^n \to \{W, F\}$ heißt *n-stellige Boole'sche Funktion*. Die Menge aller solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbb{B}_n$. Weiter sei $\mathbb{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}_n$ die Menge aller Boole'schen Funktionen.

- Eine Formel $\alpha \in \mathcal{F}$ bestimmt in kanonischer Weise eine Boole'sche Funktion f_α wie folgt:

  > Sei n minimal mit $\alpha \in \mathcal{P}(n)$. Dann ist $f_\alpha \in \mathbb{B}_{n+1}$. Sei $X_0 \dots X_n \in \{W, F\}^{n+1}$ beliebig gegeben. Wir müssen $f_\alpha(X_0 \dots X_n)$ festlegen.
  >
  > Definiere dazu eine partielle Wahrheitswertbelegung $v : \{A_0, \dots, A_n\} \to \{W, F\}$ durch $v(A_i) = X_i$ für alle $0 \leq i \leq n$. Setze nun $f_\alpha(X_0 \dots X_n) = v^*(\alpha)$.

  Wir sagen auch, f_α sei die durch α repräsentierte (oder mit α assoziierte) Boole'sche Funktion.

  Bemerkung: f_α ist im wesentlichen die Wahrheitstafel von α.

- **Beispiel:** Sei $\alpha = A_0 \vee A_2$. Somit ist $f_\alpha \in \mathbb{B}_3$, also $f_\alpha : \{W, F\}^3 \to \{W, F\}$

	$v(\alpha)$		$f(v(\alpha))$
W	W	W	W
W	W	F	W
W	F	W	W
W	F	F	W
F	W	W	W
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	F

(6) Satz: Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$: Falls $f_\alpha = f_\beta$, so ist $\alpha\ \beta$.

Beweis: Es gelte $f_\alpha = f_\beta$. Sei $f_\alpha \in \mathbb{B}_{n+1}$, also auch $f_\beta \in \mathbb{B}_{n+1}$. Somit ist n minimal mit $\alpha \in \mathcal{P}(n)$ bzw. $\beta \in \mathcal{P}(n)$. Sei $v : \{A_0, \dots, A_n\} \to \{W, F\}$ eine Wahrheitswertebelegung.

Zu zeigen ist $v^*(\alpha) = v^*(\beta)$. Wir zeigen: $v^*(\alpha) = W$ genau dann, wenn $v^*(\beta) = W$. Es gelte also $v^*(\alpha) = W$. Nach Definition von f_α und f_β ist

$$f_\alpha(v(A_0) \dots v(A_n)) = v^*(\alpha) \text{ und } f_\beta(v(A_0) \dots v(A_n)) = v^*(\beta)$$

Da $f_\alpha = f_\beta$, folgt $v^*(\beta) = v^*(\alpha) = W$. Umkehrung symmetrisch. □

1.3.4 (kanonische) konjunktive bzw. disjunktive Normalform

- **Definitionen:**
  - Ein *Literal* ist eine Primformel oder die Negation einer Primformel.
  - Eine Formel von der Form $\alpha_0 \vee \ldots \vee \alpha_n$, wobei jedes α_i Konjunktion von Literalen ist, heißt *disjunktive Normalform* (DNF)
  - Eine Formel von der Form $\alpha_0 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$, wobei jedes α_i Disjunktion von Literalen ist, heißt *konjunktive Normalform* (KNF)
- **Beispiele:**
  - $A_2 \vee (A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_{30}) \vee \neg A_3$ ist DNF
  - $A_2 \wedge (A_0 \vee \neg A_1 \vee \neg A_{30}) \wedge \neg A_3$ ist KNF
  - $A_5 \wedge \neg A_2$ ist DNF und KNF zugleich
- **Konvention:** Falls $\alpha \in \mathcal{F}$, so sei $\alpha^W = \alpha$ und $\alpha^F = \neg\alpha$, zudem $-W = F$ und $-F = W$.

(7) Satz: Jede Boole'sche Funktion in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{B}_{n+1}$ ist repräsentierbar sowohl durch eine DNF wie auch durch eine KNF.

Beweis: Sei $f \in \mathbb{B}_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Also: $f : \{W, F\}^{n+1} \to \{W, F\}$. Zuerst konstruieren wir eine DNF α mit $f_\alpha = f$. Fallunterscheidung:

1. Es gilt $f(X_0 \ldots X_n) = F$ für alle $X_0 \ldots X_n \in \{W, F\}^{n+1}$. Sei nun $\alpha = A_n \wedge \neg A_n$
2. Es existiert mindestens ein $X_0 \ldots X_n \in \{W, F\}^{n+1}$ mit $f(X_0 \ldots X_n) = W$. Setze
$$\alpha = \bigvee_{\substack{X_0 \ldots X_n \in \{W,F\}^{n+1} \\ \text{und } f(X_0 \ldots X_n) = W}} (A_0^{X_0} \wedge \ldots \wedge A_n^{X_n})$$

Wir zeigen nun $f = f_\alpha$: Offensichtlich ist n minimal mit $\alpha \in \mathcal{P}(n)$, somit $f_\alpha \in \mathbb{B}_{n+1}$. Sei nun $Y_0 \ldots Y_n \in \{W, F\}^{n+1}$ gegeben. Zu zeigen ist $f(Y_0 \ldots Y_n) = f_\alpha(Y_0 \ldots Y_n)$.

Definiere eine partielle Wahrheitswertebelegung $v : \{A_0 \ldots A_n\} \to \{W, F\}$ durch $v(A_i) = Y_i$. Bemerke nun, daß für jedes $X_0 \ldots X_n \in \{W, F\}^{n+1}$ und jedes $0 \le i \le n$ genau dann $v^*(A_i^{X_i})$ gilt, wenn $X_i = Y_i$ ist. Denn es gilt:

$$v^*(A_i^{X_i}) = \begin{cases} v^*(A_i) & \text{falls } X_i = W \quad = \begin{cases} W & \text{falls } Y_i = W \\ F & \text{falls } Y_i = F \end{cases} \\ v^*(\neg A_i) & \text{falls } X_i = F \quad = \begin{cases} W & \text{falls } Y_i = F \\ F & \text{falls } Y_i = W \end{cases} \end{cases}$$

Es folgt, daß $v^*(A_0^{X_0} \wedge \ldots \wedge A_n^{X_n}) = W$ genau dann gilt, wenn $X_i = Y_i$ für alle $0 \leq i \leq n$. Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} f_\alpha(Y_0 \ldots Y_n) = W &\overset{\text{Def.} f_\alpha}{\iff} v^*(\alpha) = W \\ &\overset{\text{Def.} v^*}{\iff} \exists\, X_0 \ldots X_n \text{ mit } f(X_0 \ldots X_n) = W \\ &\qquad \text{so daß } v^*(A_0^{X_0} \ldots A_n^{X_n}) = W \\ &\iff f(Y_0 \ldots Y_n) = W \end{aligned}$$

Eine KNF β mit $f_\beta = f$ finden wir nun durch einen dualen Beweis, d.h. wir vertauschen im obigen Beweis überall W mit F und $\vee$ mit $\wedge$:

1. Es gilt $f(X_0 \ldots X_n) = W$ für alle $X_0 \ldots X_n \in \{W, F\}^{n+1}$. Sei $\beta = (A_n \vee \neg A_n)$.
2. Es existiert $X_0 \ldots X_n \in \{W, F\}^{n+1}$ mit $f(X_0 \ldots X_n) = F$. Setze

$$\alpha = \bigwedge_{\substack{X_0 \ldots X_n \in \{W,F\}^{n+1} \\ \text{und } f(X_0 \ldots X_n) = F}} (A_0^{-X_0} \vee \ldots \vee A_n^{-X_n})$$

Zeige analog $f = f_\beta$. □

- **Beispiel:** Finde zur Formel $\alpha = (\neg A_2 \wedge A_0) \rightarrow (A_1 \vee A_2)$ semantisch äquivalente DNF γ bzw. KNF β.

  1. Methode (Beweis von Satz (7)): Erstelle die Wahrheitstafel von α (d.h. berechne f_α):

A_0	A_1	A_2	$(\neg A_2 \wedge A_0)$	$(A_1 \vee A_2)$	α
W	W	W	F	W	W
F	W	W	F	W	W
W	F	W	F	W	W
W	W	F	W	W	W
F	F	W	F	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	F	W	W
F	F	F	F	F	W

  Dann ist die DNF γ:

$$\begin{aligned} \gamma \;=\; & (A_0 \wedge A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_0 \wedge A_1 \wedge A_2) \vee (A_0 \wedge \neg A_1 \wedge A_2) \\ & \vee (A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_0 \wedge \neg A_1 \wedge A_2) \\ & \vee (\neg A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_2) \end{aligned}$$

  Dann gilt nach Satz (7): $f_\gamma = f_\alpha$. Wegen Satz (6b) ist somit α γ. Die KNF $\beta = (\neg A_0 \vee A_1 \vee A_2)$ ist auch eine DNF.

2. Methode[3] („Ausmultiplizieren“ mittels DeMorgan’scher Regeln, Distributivität etc.):

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma & = & \neg(\neg A_2 \wedge A_0) \vee (A_1 \vee A_2) \\
& & \neg\neg A_2 \vee \neg A_0 \vee A_1 \vee A_2 \\
& & A_2 \vee \neg A_0 \vee A_1 \vee A_2 \\
& & (A_2 \vee A_2) \vee \neg A_0 \vee A_1 \\
& & \neg A_0 \vee A_1 \vee A_2
\end{array}
$$

Wobei die oben erreichte DNF durch „Erweitern“ dieser DNF erreicht werden kann, z.B.

$$
\begin{array}{ll}
\neg A_0 & \neg A_0 \wedge (A_1 \vee \neg A_1) \\
& (\neg A_0 \wedge A_1) \vee (\neg A_0 \wedge \neg A_1) \\
& ((\neg A_0 \wedge A_1) \wedge (A_2 \vee \neg A_2)) \vee ((\neg A_0 \wedge \neg A_1) \wedge (A_2 \vee \neg A_2)) \\
& (\neg A_0 \wedge A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_0 \wedge A_1 \wedge \neg A_2) \vee (\neg A_0 \wedge \neg A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_2)
\end{array}
$$

- **Definition:** Sei $\alpha \in \mathcal{P}(n)$.
  - Dann heißt α *kanonische DNF bezüglich* n, falls α DNF ist und in jedem der Disjunkte von α jedes A_i für $0 \leq i \leq n$ genau einmal auftritt.
  - Entsprechend heißt α *kanonische KNF bezüglich* n, falls α KNF ist und in jedem der Konjunkte von α jedes A_i für $0 \leq i \leq n$ genau einmal auftritt.

Beispiel: Im Beispiel von oben ist die nach der 1. Methode erhaltene DNF kanonisch bezüglich 2, die DNF nach der 2. Methode ist aber nicht kanonisch bezüglich irgendeines n. Allerdings ist

(8) Korollar:

1. Jede Formel ist semantisch äquivalent zu einer DNF und zu einer KNF.
2. Jede verifizierbare Formel ist semantisch äquivalent zu einer kanonischen DNF (bezüglich eines n).
3. Jede falsifizierbare Formel ist semantisch äquivalent zu einer kanonischen KNF (bezüglich eines n).

Beweis: Sei $\alpha \in \mathcal{F}$ und f_α die assoziierte Boole’sche Funktion. Der Beweis von Satz (7) liefert eine DNF β und eine KNF γ, so daß $f_\alpha = f_\beta = f_\gamma$. Nach Satz (6b) gilt α β und α γ. Falls α erfüllbar ist, ist β kanonisch, falls α falsifizierbar ist, ist γ kanonisch (siehe Beweis von Satz (7)). □

[3] „Die zweite Methode ist einfach mit Gewalt!“

- **Übung:**

  1. Eine kanonische DNF ist erfüllbar.
  2. Eine kanonische KNF ist falsifizierbar.

- Unter den Beispielen von semantisch äquivalenten Formeln waren: $\neg(\alpha \wedge \beta)\ \neg\alpha \vee \neg\beta$ und $\neg\neg\alpha\ \alpha$. Daraus folgt

$$(\alpha \wedge \beta)\ \neg\neg(\alpha \wedge \beta)\ \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

  Dual dazu erhält man $(\alpha \vee \beta)\ \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$. Wir schließen daraus, daß jede Formel semantisch äquivalent ist zu einer Formel, in der nur $\vee$ und $\neg$ auftreten (an logischen Junktoren) und auch zu einer Formel, in der nur die logischen Junktoren $\wedge$ und $\neg$ auftreten.

  Definition: Eine Menge M von logischen Junktoren (eine sogenannte *Signatur*) heißt vollständig, falls jede Formel semantisch äquivalent ist zu einer Formel, die nur Junktoren aus M enthält.

  Beispiele:

  1. Die Signaturen $\{\vee, \neg\}$ und $\{\wedge, \neg\}$ sind beide vollständig.
  2. Die Signatur $\{\uparrow\}$ ist vollständig: $\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \uparrow \alpha$

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \uparrow \beta$	$\alpha \uparrow \alpha$
W	W	F	F	F
F	W	W	W	W
W	F	F	W	F
F	F	W	W	W

  Entsprechend ist $(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \uparrow \neg\beta$ und

$$(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \Leftrightarrow \neg(\alpha \uparrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \uparrow \beta) \uparrow (\alpha \uparrow \beta)$$

  3. Die Signatur $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ist nicht vollständig. Wir werden zeigen, daß $\neg A_0$ nicht semantisch äquivalent ist zu einer Formel, die nur $\wedge, \vee, \rightarrow$ enthält.

     Wir definieren rekursiv Mengen $\mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Sei $\mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(0) = \{\, A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(n+1)$ enthält genau jene Wörter γ mit der Eigenschaft, daß $\alpha, \beta \in \mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(0) \cup \ldots \cup \mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(n)$ existiere, so daß $\gamma = (\alpha \wedge \beta)$ oder $\gamma = (\alpha \vee \beta)$ oder $\gamma = (\alpha \rightarrow \beta)$. Dann ist $\mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(n)$ die Menge aller Formeln, die nur die Junktoren $\wedge, \vee, \rightarrow$ enthalten.

     Sei $w : \{\, A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{W, F\}$ die konstant wahre Wahrheitswertbelegung (also $w(A_n) = W$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Dann gilt $w^*(\neg A_0) =$

F. Wir werden nun zeigen, daß $w^*(\gamma) = W$ für alle $\gamma \in \mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}$ ist, was die Behauptung beweist.

Per Induktion über das kleinste N mit $\gamma \in \mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(n)$:

- Induktionsanfang: Falls $n = 0$, so ist $\gamma = A_k$ und $w^*(A_k) = W$.
- Sei nun $\gamma \in \mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(n+1)$. Finde $\alpha, \beta \in \bigcup_{i \leq n} \mathcal{F}^{\wedge,\vee,\rightarrow}(i)$ mit $\gamma = (\alpha \wedge \beta)$, $\gamma = (\alpha \vee \beta)$ oder $\gamma = (\alpha \rightarrow \beta)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $w^*(\alpha) = w^*(\beta) = W$. Aus den Wahrheitstafeln für $\wedge, \vee, \rightarrow$ folgt $w^*(\gamma) = W$.

4. Die Signatur $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ist nicht vollständig (siehe Übungsblatt 3)

2 Prädikatenlogik - die Sprache erster Stufe

2.1 Syntax

2.1.1 Alphabet, Terme, Formeln, Rang

- **Definition:** Im *Alphabet* haben wir folgende Sorten von Buchstaben:

  1. $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ mit $n \in \mathbb{N}$ *(Variablen)*
  2. $\neg$ und $\vee$ *(Junktoren)*
  3. $\exists$ *(Existenzquantor)*
  4. $\equiv$ *(logische Gleichheit)*
  5. (und) *(Klammern)*
  6. (a) für jedes $n \geq 1$ eine eventuell leere Menge von n-stelligen *Relationszeichen*
     (b) für jedes $n \geq 1$ eine eventuell leere Menge von n-stelligen *Funktionszeichen*
     (c) eine eventuell leere Menge von *Konstanten*

  Die Menge aller unter (1) bis (5) genannten Buchstaben bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$. Dabei umfaßt $\mathcal{A}$ die *logischen Zeichen*. Die Menge der unter (6) genannten Buchstaben bezeichnen wir mit $\mathcal{S}$, dabei enthält $\mathcal{S}$ die *Symbole*. Die Menge $\mathcal{S}$ ist variabel und wird je nach dem Kontext anders gewählt. Setze $\mathcal{A}_\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{S}$. Nun ist $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ das Alphabet der noch zu definierenden Sprache $\mathcal{L}_\mathcal{S}$.

  Beispiele konkreter Symbolmengen:

  – Für die Arithmetik nimmt man $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ oder $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}^{<} = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$, wobei $+$ und $\cdot$ zweistellige Funktionszeichen, $<$ ein zweistelliges Relationszeichen und 0 und 1 Konstanten sind.
  – Für die Gruppentheorie: $\mathcal{S}_{Gr} = \{\circ, e\}$, wobei $\circ$ ein zweistelliges Funktionszeichen, e eine Konstante ist.

- Nun ist $\mathcal{A}_\mathcal{S}^{<\mathbb{N}}$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\mathcal{A}_\mathcal{S}$. Im folgenden definieren wir die für uns sinnvollen Wörter. Zuerst definieren wir $\mathcal{S}$-Terme, danach $\mathcal{S}$-Formeln. Die Absicht dabei ist, daß Formeln für Aussagen stehen, in welchen Terme Subjekt und Objekt bezeichnen. Sei nun eine Symbolmenge $\mathcal{S}$ fixiert.

  Definition: $\mathcal{S}$-*Terme* sind wie folgt definiert:

(T_1) Jede Variable ist ein $\mathcal{S}$-Term.

(T_2) Jede Konstante ist ein $\mathcal{S}$-Term.

(T_3) Sind $t_0, \ldots, t_{n-1}$ $\mathcal{S}$-Terme und f ein n-stelliges Funktionszeichen, so ist $ft_0 \ldots t_{n-1}$ ein S-Term

Als Kalkül formuliert:

(T_1) $\frac{}{v_n}$ für alle n

(T_2) $\frac{}{c}$ für alle Konstanten $c \in S$

(T_3) $\frac{t_0,\ldots,t_{n-1}}{ft_0\ldots t_{n-1}}$ für f ein n-stelliges Funktionszeichen

Die Menge aller $\mathcal{S}$-Terme wird mit $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ bezeichnet. Wiederum definieren wir $\mathcal{T}_\mathcal{S}(n)$ mit $\mathcal{T}_\mathcal{S}(0) = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\text{alle Konstanten in } \mathcal{S}\}$ und

$$\mathcal{T}_\mathcal{S}(n{+}1) = \left\{ ft_0 \ldots t_{k-1} \mid t_i \in \bigcup_{j \leq n} \mathcal{T}_\mathcal{S}(j);\ f \underset{\text{Funktionszeichen}}{\text{ein } k\text{-stelliges}} \in S; k \in \mathbb{N} \right\}$$

Dann ist wieder $\mathcal{T}_\mathcal{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_\mathcal{S}(n)$.

Definition: Erhalte Rang(t) für alle $t \in \mathcal{T}_\mathcal{S}$ als minimales n mit $t \in \mathcal{T}_\mathcal{S}(n)$. Wir werden sehr häufig Eigenschaften von Termen beweisen durch Induktion über Rang(t).

Beispiele von Termen:

- Seien f ein zweistelliges, g ein einstelliges Funktionszeichen. Ist gv_0fgv_4c Term oder nicht? Nein, da gv_0 schon ein Term ist.
- Seien f ein einstelliges, g ein zweistelliges Funktionszeichen und c Konstante. Ist gv_0fgv_4c Term oder nicht? Ja! $g(v_0, f(g(v_4, c)))$
- Seien f ein zweistelliges, g ein dreistelliges Funktionszeichen, c und d Konstanten. Dann ist $gfv_0gcdfv_2dv_10c$ ein Term, denn $g(f(v_0, g(c, d, f(v_2, d))), v_10, c)$.

• **Definition:** $\mathcal{S}$-*Formeln* sind wie folgt definiert:

(F_1) Für beliebige $\mathcal{S}$-Terme t_0, t_1 ist $t_0 \equiv t_1$ eine $\mathcal{S}$-Formel

(F_2) Sind $t_0, \ldots, t_{n-1}$ $\mathcal{S}$-Terme und $R \in \mathcal{S}$ ein n-stelliges Relationssymbol, so ist $Rt_0 \ldots t_{n-1}$ eine $\mathcal{S}$-Formel

(F_3) Ist φ $\mathcal{S}$-Formel, so auch $\neg\varphi$

(F_4) Sind φ, ψ $\mathcal{S}$-Formeln, so auch $(\varphi \vee \psi)$

(F_5) Ist φ $\mathcal{S}$-Formel und x eine Variable, so ist $\exists\, x\varphi$ eine $\mathcal{S}$-Formel

Wiederum als Kalkül formuliert:

(F_1) $\dfrac{}{t_0 \equiv t_1}$ für $t_0, t_1 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$

(F_2) $\dfrac{}{Rt_0 \ldots t_{n-1}}$ für $t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ und $R \in S$ n-stelliges Relationssymbol

(F_3) $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$

(F_4) $\dfrac{\varphi, \psi}{(\varphi \vee \psi)}$

(F_5) $\dfrac{\varphi}{\exists x \varphi}$ für x eine Variable.

Die $\mathcal{S}$-Formeln aus (F_1), (F_2) heißen *atomar* oder *Primformeln*. Die Menge aller $\mathcal{S}$-Formeln bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und sie heißt die *zur Symbolmenge $\mathcal{S}$ gehörende Sprache erster Stufe*. Häufig lassen wir dann in den obigen Definitionen das $\mathcal{S}$ weg.

Definiere rekursiv Mengen $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(0) \;:=\; & \left\{ t_0 \equiv t_1 \mid t_0, t_1 \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}} \right\} \\ & \cup \left\{ Rt_0 \ldots t_{n-1} \mid R \underset{\text{Relationszeichen}}{\text{ein } n\text{-stelliges}} ; t_0, \ldots, t_{n-1} \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}; n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

und $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}(n+1)$ enthält genau die Wörter γ über $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, so daß $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(0) \cup \ldots \cup \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(n)$ und eine Variable x existieren mit $\gamma = \neg\alpha$ oder $\gamma = (\alpha \vee \beta)$ oder $\gamma = \exists x \alpha$. Dann ist offensichtlich $\mathcal{L}^{\mathcal{S}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(n)$.

Den *Rang* von $\gamma \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ definieren wir als das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $\gamma \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(n)$.

Sei $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Eine *Subformel* von φ ist ein Intervall von φ, das selbst Formel ist.

- **Schreibweisen:** Falls $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, so schreiben wir statt

$$\begin{array}{rll} (\varphi \wedge \psi) & \text{anstelle von} & \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ (\varphi \rightarrow \psi) & \text{anstelle von} & (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) & \text{anstelle von} & (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \\ \forall x \varphi & \text{anstelle von} & \neg\exists x \neg\varphi \\ t_0 R t_1 & \text{anstelle von} & R t_0 t_1 \end{array}$$

- **Beispiele** von $\mathcal{S}$-Formeln[4]: Sei R ein zweistelliges Relationszeichen.

[4]Dies sind die Axiome der Äquivalenzrelationen!

1. $\forall v_0 Rv_0v_0$ kürzt ab $\neg\exists v_0 \neg Rv_0v_0$
2. $\forall v_0 \forall v_1 (Rv_0v_1 \rightarrow Rv_1v_0)$ kürzt ab:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\exists v_0 \neg\neg\exists v_1 \neg(\neg Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0) & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(8) \\
\exists v_0 \neg\neg\exists v_1 \neg(\neg Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0) & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(7) \\
\neg\neg\exists v_1 \neg(\neg Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0) & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(6) \\
\neg\exists v_1 \neg(\neg Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0) & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(5) \\
\exists v_1 \neg(\neg Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0) & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(4) \\
\neg(\neg Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0) & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(3) \\
(\neg Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0) & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(2) \\
\neg Rv_0v_1 \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(1) \text{ und } Rv_1v_0 & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(0) \\
Rv_0v_1 & \in & \mathcal{L}^{\mathcal{S}}(0)
\end{array}$$

3. $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 ((Rv_0v_1 \wedge Rv_1v_2) \rightarrow Rv_0v_2)$

Einige Beispiele aus der Umgangssprache:

1. „Einige Politiker wollen den Beamten ans Geld.“ P und B sind einstellige Relationenszeichen, G ist eine zweistellige Relationszeichen, dann läßt sich die Aussage schreiben als:
$$\exists x(Px \wedge \forall y(By \rightarrow Gxy))$$
2. „Nicht alle Vögel können fliegen.“ V und F sind einstellige Relationenszeichen, dann läßt sich die Aussage schreiben als:
$$\neg\forall x(Vx \rightarrow Fx)$$
3. „Jeder, der Ausdauer hat, kann Logik lernen.“ A und L sind einstellige Relationenszeichen, dann läßt sich die Aussage schreiben als:
$$\forall x(Ax \rightarrow Lx)$$

2.1.2 Eindeutigkeit des Formelaufbaus

(1) Lemma: Jede $\mathcal{S}$-Formel enthält gleich viele Linksklammern wie Rechtsklammern.

Beweis: Induktion über den Rang. Terme enthalten keine Klammern, folglich auch die Primformeln (in $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}(0)$) nicht. Sei die Behauptung für Formeln mit Rang $\leq n$ bewiesen. Sei nun $\text{Rang}(\gamma) = n+1$. Es gibt $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ mit $\text{Rang}(\alpha), \text{Rang}(\beta) \leq n$ und eine Variable x mit $\gamma = \neg\alpha$ oder $\gamma = (\alpha \vee \beta)$ oder $\gamma = \exists x\alpha$. Die Behauptung folgt unmittelbar.

(2) Lemma:

(a) Kein echtes Anfangsstück eines Terms ist ein Term.

(b) Kein echtes Anfangsstück einer Formel ist eine Formel.

Beweis: siehe Übung.

(3) Satz: Eindeutigkeit des Term- bzw. Formelaufbaus:

(a) Jeder Term ist entweder eine Variable oder eine Konstante oder von der Gestalt $ft_0 \dots t_{n-1}$. Im letzten Fall sind die Funktionszeichen f und die Terme $t_0, \dots, t_{n-1}$ eindeutig bestimmt.

(b) Jede Formel hat genau eine der folgenden Gestalten:

(1) $t_0 \equiv t_1$

(2) $Rt_0 \dots t_{n-1}$

(3) $\neg\varphi$

(4) $(\varphi \vee \psi)$

(5) $\exists x\varphi$

wobei $t_0, \dots, t_{n-1}$ Terme sind, R ein Relationszeichen, φ und ψ Formeln und x eine Variable. Dabei sind t_0, t_1 in (1) eindeutig, in (2) sind das Relationszeichen R und die Terme $t_0, \dots, t_{n-1}$ eindeutig, in (3) ist φ, in (4) die Formeln φ, ψ eindeutig, in (5) sind die Variable x und die Formel φ eindeutig.

Beweis:

(a) Zur Eindeutigkeit im Fall $t = ft_0 \dots t_{n-1}$: Sei noch $t = gt'_0 \dots t'_{k-1}$, dann gilt $f = g$. Folglich $t_0 \dots t_{n-1} = t'_0 \dots t'_{k-1}$. Dann ist t_0 Anfangsstück von t'_0 oder umgekehrt. Wegen Lemma (2) gilt $t_0 = t'_0$. Folglich $t_1 \dots t_{n-1} = t'_1 \dots t'_{k-1}$. Wieder muß $t_1 = t'_1$ gelten usw. Dann folgt $n = k$ und $t_i = t'_i$ alle $i < n$.

(b) Zur Eindeutigkeit:

(1) Wäre $t_0 \equiv t_1 = t'_0 \equiv t'_1$, so ist t_0 Anfangsstück von t'_0 oder umgekehrt. Mit Lemma (2) folgt $t_0 = t'_0$ und somit $t_1 = t'_1$.

(...) Die anderen Fälle analog unter Verwendung von Lemma (2).

2.1.3 Definieren rekursiver Funktionen

- Aufgrund von Satz (3) können wir nun Funktionen auf den Mengen $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ oder $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ rekursiv definieren. **Beispiele:**

1. Definiere var auf $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ und dann auf $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ rekursiv, so daß $\mathrm{var}(t)$ bzw. $\mathrm{var}(\varphi)$ die Menge der in t bzw. φ auftretenden Variablen ist.
   - Auf $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$: $\mathrm{var}(v_n) = \{v_n\}$, für eine Konstante $c \in \mathcal{S}$ ist $\mathrm{var}(c) = \emptyset$ und $\mathrm{var}(ft_0 \dots t_{n-1}) = \mathrm{var}(t_0) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_{n-1})$.
   - Auf $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$: $\mathrm{var}(t_0 \equiv t_1) = \mathrm{var}(t_0) \cup \mathrm{var}(t_1)$; $\mathrm{var}(Rt_0 \dots t_{n-1}) = \mathrm{var}(t_0) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_{n-1})$; $\mathrm{var}(\neg\varphi) = \mathrm{var}(\varphi)$; $\mathrm{var}((\varphi \vee \psi)) = \mathrm{var}(\varphi) \cup \mathrm{var}(\psi)$; $\mathrm{var}(\exists x \varphi) = \{x\} \cup \mathrm{var}(\varphi)$.
2. Definiere Sub auf $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ rekursiv: $\mathrm{Sub}(t_0 \equiv t_1) = \{t_0 \equiv t_1\}$; $\mathrm{Sub}(Rt_0 \dots t_{n-1}) = \{Rt_0 \dots t_{n-1}\}$; $\mathrm{Sub}(\neg\varphi) = \mathrm{Sub}(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$; $\mathrm{Sub}((\varphi \vee \psi)) = \mathrm{Sub}(\varphi) \cup \mathrm{Sub}(\psi) \cup \{(\varphi \vee \psi)\}$; $\mathrm{Sub}(\exists x \varphi) = \mathrm{Sub}(\varphi) \cup \{\exists x \varphi\}$.

2.1.4 Freie und gebundene Variablen

- Betrachte die Formel $\varphi = \exists x (Ryz \wedge \forall y (\neg y \equiv x \vee Ryz))$.

  Definition: Der *Wirkungsbereich* eines Quantors ist die Subformel, die auf diesen Quantor folgt, zum Beispiel ist $(x \equiv y)$ der Wirkungsbereich des Existenzquantors in $\exists x (x \equiv y)$.

  Definition: Falls eine Variable x im Wirkungsbereich eins Quantors $\exists x$ oder $\forall x$ liegt, so sagen wir, die Variable x trete dort *gebunden* auf. Falls x nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists x$ oder $\forall x$ liegt, so sagen wir, x trete dort *frei* auf.

  Falls eine Variable x in einem Quantor auftritt (also $\exists x$ oder $\forall x$), so ist ihr Auftreten dort ebenfalls gebunden. Im obigen Beispiel φ ist also x gebunden, z frei und y vorne in Ryz frei und hinten in nach $\forall y$ gebunden.

  Definition: Eine Variable $x \in \mathrm{var}(\varphi)$ heißt *freie Variable* einer Formel φ, falls x mindestens einmal in φ frei auftritt, andernfalls heißt x *gebundene Variable* von φ.

- Rekursiv definieren wir eine Funktion frei auf $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, so daß $\mathrm{frei}(\varphi)$ die Menge aller freien Variablen von φ ist:

  - $\mathrm{frei}(t_0 \equiv t_1) = \mathrm{var}(t_0) \cup \mathrm{var}(t_1)$
  - $\mathrm{frei}(Rt_0 \dots t_{n-1}) = \mathrm{var}(t_0) \cup \dots \cup \mathrm{var}(t_{n-1})$
  - $\mathrm{frei}(\varphi \vee \psi) = \mathrm{frei}(\varphi) \cup \mathrm{frei}(\psi)$
  - $\mathrm{frei}(\neg\varphi) = \mathrm{frei}(\varphi)$
  - $\mathrm{frei}(\exists x \varphi) = \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$

Beispiel (wir nehmen an, daß x, y, z paarweise verschiedene v_n sind):

$$\begin{aligned}
& \operatorname{frei}(\exists x(Ryz \wedge \forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz))) \\
= \; & \operatorname{frei}(Ryz \wedge \forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz)) \setminus \{x\} \\
= \; & (\operatorname{frei}(\neg Ryz) \cup \operatorname{frei}(\neg \forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz))) \setminus \{x\} \\
= \; & (\operatorname{frei}(Ryz) \cup \operatorname{frei}(\forall y(\neg y \equiv x \vee Ryz))) \setminus \{x\} \\
= \; & (\{y, z\} \cup \operatorname{frei}(\exists y \neg(\neg y \equiv x \vee Ryz))) \setminus \{x\} \\
= \; & (\{y, z\} \cup (\operatorname{frei}(\neg y \equiv x \vee Ryz) \setminus \{y\})) \setminus \{x\} \\
= \; & (\{y, z\} \cup ((\operatorname{frei}(\neg y \equiv x) \cup \operatorname{frei}(Ryz)) \setminus \{y\})) \setminus \{x\} \\
= \; & (\{y, z\} \cup (\{x, y, z\} \setminus \{y\})) \setminus \{x\} \\
= \; & (\{y, z\} \cup \{x, z\}) \setminus \{x\} \\
= \; & \{y, z\}
\end{aligned}$$

- **Definition:**

  1. Formeln ohne freie Variablen heißen $\mathcal{S}$-*Sätze*.
  2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{L}_n^{\mathcal{S}} = \{ \varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \mid \operatorname{frei}(\varphi) \subseteq \{v_0, \ldots, v_n\} \}$

  Bemerkung: $\mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ ist die Menge aller $\mathcal{S}$-Sätze. Sätze der Mathematik (Theoreme) sind immer Sätze in diesem Sinn.

2.2 Semantik der Sprachen erster Stufe

- Ein Satz wie $\forall v_0 R v_0 v_0$ (wobei R ein zweistelliges Relationszeichen ist) kann wahr oder falsch sein, je nachdem, wie und wo wir ihn interpretieren.

  Wenn wir z.B. R interpretieren als „teilbar sein durch" im Grundbereich $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, so entsteht aus $\forall v_0 R v_0 v_0$ eine wahre Aussage über die natürlichen Zahlen (Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist teilbar durch sich selbst). Wenn wir andererseits R interpretieren als „ist kleiner als" über $\mathbb{N}$, so erhalten wir eine falsche Aussage.

- **Definition:** Eine *n-stellige Funktion* über einer Menge A ist eine Abbildung von A^n nach A. Eine *n-stellige Relation* über A ist eine Teilmenge von A^n.

  Beispiele: Im obigen Beispiel wurde R interpretiert als

  $$\{ (n, m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \mid (m \mid n) \} \text{ bzw. } \{ (n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m \}$$

  Die Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ ist Beispiel für eine zweistellige Funktion über $\mathbb{N}$ (mit $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}} = \{+, \cdot, 0, 1\}$).

- **Definition:** Sei $\mathcal{S}$ eine Symbolmenge. Eine $\mathcal{S}$-*Struktur* ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \mathsf{a})$ mit folgenden Eigenschaften:

  1. A ist eine nichtleere Menge (heißt *Träger* bzw. *Grundbereich* der Struktur $\mathfrak{A}$)
  2. a ist eine Funktion, welche die Symbole aus $\mathcal{S}$ folgendermaßen interpretiert (d.h. a ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathcal{S}$ und folgenden Werten):
     (a) Falls $R \in \mathcal{S}$ ein n-stelliges Relationszeichen ist, so ist $\mathsf{a}(R)$ eine n-stellige Relation über A.
     (b) Falls $f \in \mathcal{S}$ ein n-stelliges Funktionszeichen ist, so ist $\mathsf{a}(f)$ eine n-stellige Funktion über A.
     (c) Falls $c \in S$ eine Konstante, so ist $\mathsf{a}(c) \in A$.

- **Notation:** Statt $\mathsf{a}(R), \mathsf{a}(f)$ und $\mathsf{a}(c)$ schreiben wir häufig R^A, f^A und c^A; falls a klar ist aus dem Kontext. Falls $\mathcal{S}$ endlich oder überschaubar ist, listen wir das Bild von a auf:

  Falls $\mathcal{S} = \{R, f, c\}$, so schreiben wir $\mathfrak{A} = (A, R^A, f^A, c^A)$. Falls $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathrm{Ar}} = \{+, \cdot, 0, 1\}$, so ist $\mathcal{N}$ das Standardmodell der Arithmetik, wobei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$. Entsprechend ist $\mathcal{N}^<$ das Standardmodell der Signatur $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}^<$.

  Im Fall von $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$ oder $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}^<$ schreiben wir oft $t_0 + t_1$ anstelle von $+t_0t_1$ bzw. $t_0 \cdot t_1$ anstelle von $\cdot t_0 t_1$.

2.2.1 Belegung, Interpretation, Modell

- Die Formel $\exists v_0 v_0 + v_0 \equiv v_n$ (wobei $n \neq 0$) kann wahr oder falsch sein, je nachdem, wie die Variable v_n interpretiert (belegt) wird.

  Definition: Eine *Belegung* in einer $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \mathsf{a})$ ist eine Abbildung $\beta : \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to A$.

  Definition: Eine $\mathcal{S}$-*Interpretation* $\mathcal{I}$ ist ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$ bestehend aus einer $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β.

  Beispiel: Die Formel $\exists\ v_0 v_0 + v_0 \equiv v_n$ ist wahr in $\mathcal{N}$, falls wir als Belegung β mit $\beta(v_n) = 2n$ wählen (sie ist dann wahr in $(\mathcal{N}, \beta)$). Falls aber β' mit $\beta'(v_n) = 2n + 1$ gewählt wird, so ist $\exists v_0 v_0 + v_0 \equiv v_n$ falsch in $(\mathcal{N}, \beta')$.

  Definition: Sei β eine Belegung in der Struktur $\mathfrak{A}$, sei $a \in A$ und sei x

eine Variable. Wir definieren eine neue Belegung $\beta\frac{a}{x}$ wie folgt:

$$\beta\frac{a}{x}(v_n) = \begin{cases} \beta(v_n) & \text{falls} \quad x \neq v_n \\ a & \text{falls} \quad x = v_n \end{cases}$$

Falls $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine $\mathcal{S}$-Interpretation ist, so bezeichne $\mathcal{I}\frac{a}{x}$ die $\mathcal{S}$-Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x})$.

- Im folgenden wollen wir definieren, wann eine $\mathcal{S}$-Formel in einer $\mathcal{S}$-Interpretation gilt. Dazu müssen wir zuerst die Terme interpretieren.

  Definition:

  1. Für jede Variable x sei $\mathcal{I}(x) = \beta(x)$.
  2. Für jede Konstante $c \in \mathcal{S}$ sei $\mathcal{I}(c) = \mathsf{a}(c)$.
  3. Falls $f \in S$ ein n-stelliges Funktionszeichen mit $t_0, \ldots, t_{n-1}$ Terme sind, so sei $\mathcal{I}(ft_0, \ldots, t_{n-1}) = \mathsf{a}(f)\Big(\mathcal{I}(t_0), \ldots, \mathcal{I}(t_{n-1})\Big)$.

  Bemerkung: Mit Induktion über den Rang von Termen zeigt man $\mathcal{I}(t) \in A$ für alle $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$.

  Beispiel: $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$ und $t = (v_n + 1) \cdot v_{n+1} (= \cdot + v_n 1 v_{n+1})$. Sei $\mathcal{I}(\mathcal{N}, \beta)$, wobei $\beta(v_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sei. Nun ist

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(t) &= \mathsf{a}(\cdot)\Big(\mathcal{I}(+v_n 1), \mathcal{I}(v_{n+1})\Big) \\ &= \mathsf{a}(\cdot)\Big(\mathsf{a}(+)(\mathcal{I}(v_n), \mathcal{I}(1)), \mathcal{I}(v_{n+1})\Big) \\ &= \mathsf{a}(\cdot)\Big(\mathsf{a}(+)(n, 1^{\mathbb{N}}), n+1\Big) \\ &= (n +^{\mathbb{N}} 1^{\mathbb{N}}) \cdot^{\mathbb{N}} (n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

- Nun definieren wir, wann eine Interpretation $\mathcal{I}$ ein *Modell* einer Formel φ ist. Dafür sagen wir auch, $\mathcal{I}$ *erfülle* φ und wir schreiben $\mathcal{I} \models \varphi$.

  Definition:

  1. $\mathcal{I} \models t_0 \equiv t_1$ genau dann, wenn $\mathcal{I}(t_0) = \mathcal{I}(t_1)$.
  2. $\mathcal{I} \models Rt_0 \ldots t_{n-1}$ genau dann, wenn $(\mathcal{I}(t_0), \ldots, \mathcal{I}(t_{n-1})) \in \mathsf{a}(R)$.
  3. $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ genau dann, wenn nicht $\mathcal{I} \models \varphi$.
  4. $\mathcal{I} \models \varphi \vee \psi$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ oder $\mathcal{I} \models \psi$.
  5. $\mathcal{I} \models \varphi \wedge \psi$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \psi$.

6. $\mathcal{I} \models \exists x \varphi$ genau dann, wenn ein $a \in A$ existiert, so daß $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.
7. $\mathcal{I} \models \forall x \varphi$ genau dann, wenn für alle $a \in A$ gilt: $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.
8. $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$ genau dann, wenn nicht $\mathcal{I} \models \varphi$ oder $\mathcal{I} \models \psi$.
9. $\mathcal{I} \models \varphi \leftrightarrow \psi$ genau dann, wenn zugleich ($\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \psi$) oder zugleich (nicht $\mathcal{I} \models \varphi$ und nicht $\mathcal{I} \models \psi$).

Definition (Kurzschreibweise): Falls $\mathcal{I}$ eine $\mathcal{S}$-Interpretation ist und $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, so sei $\mathcal{I} \models \Phi :\Leftrightarrow \forall \varphi \in \Phi\ \mathcal{I} \models \varphi$.

2.2.2 Beispiel Gruppen

- **Beispiel:** Sei $\mathcal{S}_{Gr} = \{\circ, e\}$; sei Φ_{Gr} die Menge der Gruppenaxiome:
  - $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\ v_0 \circ (v_1 \circ v_2) \equiv (v_0 \circ v_1) \circ v_2$
  - $\forall v_0\ v_0 \circ e \equiv v_0$
  - $\forall v_0 \exists v_1\ v_0 \circ v_1 \equiv e$

  Sei nun $\mathfrak{A} = (A, \circ^A, e^A)$ eine $\mathcal{S}_{Gr}$-Struktur. Dann sind äquivalent:

  1. $\mathfrak{A}$ ist eine Gruppe.
  2. Für jede Belegung β gilt $(\mathfrak{A}, \beta) \models \Phi_{Gr}$
  3. Es existiert eine Belegung β mit $(\mathfrak{A}, \beta) \models \Phi_{Gr}$

Beweis: Wir zeigen (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2). Sei β eine Belegung und $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I} \models \forall v_0\; v_0 \circ e \equiv v_0 \\
\iff\; & \mathcal{I} \models \neg\exists v_0 \neg v_0 \circ e \equiv v_0 \\
\iff\; & \text{nicht } \mathcal{I} \models \exists v_0 \neg v_0 \circ e \equiv v_0 \\
\iff\; & \text{ex. kein } a \in A \text{ mit } \mathcal{I}\frac{a}{v_0} \models \neg v_0 \circ e \equiv v_0 \\
\iff\; & \text{ex. kein } a \in A \text{ so daß nicht } \mathcal{I}\frac{a}{v_0} \models v_0 \circ e \equiv v_0 \\
\iff\; & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \mathcal{I}\frac{a}{v_0} \models v_0 \circ e \equiv v_0 \\
\iff\; & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \mathcal{I}\frac{a}{v_0} \models v_0 \circ e \equiv v_0 \\
\iff\; & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \mathcal{I}\frac{a}{v_0}(v_0 \circ e) = \mathcal{I}\frac{a}{v_0}(v_0) \\
\iff\; & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \mathcal{I}\frac{a}{v_0}(v_0) \circ^A \mathcal{I}\frac{a}{v_0}(e) = \mathcal{I}\frac{a}{v_0}(v_0) \\
\iff\; & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \beta\frac{a}{v_0}(v_0) \circ^A e^A = \beta\frac{a}{v_0}(v_0) \\
\iff\; & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } a \circ^A e^A = a
\end{aligned}$$

Zeige ebenso für die anderen Axiome:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I} \models \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\; v_0 \circ (v_1 \circ v_2) \equiv (v_0 \circ v_1) \circ v_2 \\
\iff\; & \ldots \\
\iff\; & \text{für alle } a, b, c \in A \text{ gilt } a \circ^A (b \circ^A c) = (a \circ^A b) \circ^A c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I} \models \forall v_0 \exists v_1\; v_0 \circ v_1 \equiv e \\
\iff\; & \ldots \\
\iff\; & \text{für alle } a \in A \text{ ex. } b \in A \text{ mit } a \circ^A b = e^A
\end{aligned}$$

- **Definition:** Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Wir sagen, daß φ aus Ψ *semantisch folgt*, falls für jede $\mathcal{S}$-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$ auch $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt. Dafür schreiben wir auch $\Phi \models_{\mathcal{S}} \varphi$. Falls $\Phi = \{\psi\}$ für ein $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$, so schreiben wir $\psi \models_{\mathcal{S}} \varphi$ anstelle von $\{\psi\} \models_{\mathcal{S}} \varphi$.

- **Beispiel:** Seien $\mathcal{S}_{Gr}$ und Φ_{Gr} wie im Beispiel oben. Es gilt: $\Phi_{Gr} \models \forall v_0 \exists v_1\; v_1 \circ v_0 \equiv e$.

  Beweis: Wir gehen von einer beliebigen $\mathcal{S}$-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ mit $\mathcal{I} \models \Phi_{Gr}$ aus. Zu zeigen ist: $\mathcal{I} \models \forall v_0 \exists v_1\; v_1 \circ v_0 \equiv e$. Nach obigem

Beispiel wissen wir, daß $\mathfrak{A} = (A, \circ^A, e^A)$ eine Gruppe ist. Wir zeigen, daß für jedes $a \in A$ ein $b \in A$ existiert mit $b \circ^A a = e^A$. Sei $a \in A$ beliebig. Da $\mathfrak{A}$ eine Gruppe ist, existiert $b \in A$ mit $a \circ^A b = e^A$. Ebenso existiert $c \in A$ mit $b \circ^A c = e^A$. Nun gilt

$$\begin{aligned} b \circ^A a &= (b \circ^A a) \circ^A e^A = (b \circ^A a) \circ^A (b \circ^A c) \\ &= (b \circ^A (a \circ^A b)) \circ^A c = (b \circ^A e^A) \circ^A c \\ &= b \circ^A c = e^A \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{I} \models \forall v_0 \exists v_1 \; v_1 \circ v_0 \equiv e \\ \iff \quad & \text{für alle } a \in A \text{ gilt } \mathcal{I}\frac{a}{v_0} \exists v_1 \; v_1 \circ v_0 \equiv e \\ \iff \quad & \text{für alle } a \in A \text{ existiert } b \in A \text{ mit } \left(\mathcal{I}\frac{a}{v_0}\right)\frac{b}{v_1} v_1 \circ v_0 \equiv e \\ \iff \quad & \text{für alle } a \in A \text{ existiert } b \in A \text{ mit } \left(\mathcal{I}\frac{a}{v_0}\right)\frac{b}{v_1}(v_1) \circ^A \left(\mathcal{I}\frac{a}{v_0}\right)\frac{b}{v_1}(v_0) = e^A \\ \iff \quad & \text{für alle } a \in A \text{ existiert } b \in A \text{ mit } b \circ^A a = e^A \end{aligned}$$

- **Beispiel:** Wir zeigen, daß $\forall v_0 v_1 \; v_0 \circ v_1 \equiv v_1 \circ v_0$ nicht semantische Konsequenz von Φ_{Gr} ist. Dazu müssen wir eine $\mathcal{S}_{Gr}$-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ finden mit $\mathcal{I} \models \Phi_{Gr}$, aber $\mathcal{I} \not\models \forall v_0 v_1 \; v_0 \circ v_1 \equiv v_1 \circ v_0$. Sei A die Menge aller Permutationen von $\mathbb{N}$ (Bijektionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Sei $\circ^A$ die Komposition von Abbildungen. Sei e^A die Identität auf $\mathbb{N}$. Nun existieren $f, g \in A$ mit $f \circ^A g \neq g \circ^A f$:

  Seien f, g definiert durch

  $$f(0) = 1; f(1) = 0; f(n) = n; g(0) = 0; g(1) = 2; g(2) = 1; g(n) = n$$

  Dann ist $(f \circ^A g)(0) = 1 \neq 2 = (g \circ^A f)(0)$.

  Wir haben die $\mathcal{S}_{Gr}$-Struktur $\mathfrak{A}$ definiert. Da $\mathfrak{A}$ Gruppe ist, gilt wegen Beispiel $(\mathfrak{A}, \beta) \models \Phi_{Gr}$ für beliebige Belegung β. Zeige nun, daß $(\mathfrak{A}, \beta) \models \forall v_0 v_1 \; v_0 \circ v_1 \equiv v_1 \circ v_0$ äquivalent ist zur folgenden Aussage:

  Für alle $f, g \in A$ gilt $f \circ^A g = g \circ^A f$. Wie eben gesehen ist dies falsch.

- **Übung:** Die Gruppenaxiome sind irredundant, d.h. für jedes $\varphi \in \Phi_{Gr}$ gilt $\Phi_{Gr} \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi$.

2.2.3 Koinzidenzlemma

- **Definitionen:**

  1. Eine Formel φ heißt erfüllbar, falls mindestens eine Interpretation $\mathcal{I}$ existiert mit $\mathcal{I} \models \varphi$. Ebenso heißt eine Formelmenge Φ erfüllbar, falls Φ ein Modell hat. Wir schreiben dafür $\text{Erf}_{\mathcal{S}}\Phi$.

     Dies ist stärker als nur $\text{Erf}_{\mathcal{S}}\{\psi\}$ für alle $\psi \in \Phi$ zu verlangen.

  2. Eine Formel φ heißt *allgemeingültig (Tautologie)*, falls $\emptyset \models \varphi$ (d.h. $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt für alle Interpretationen $\mathcal{I}$). Dafür schreiben wir $\models \varphi$.
  3. Zwei Formeln φ, ψ heißen *semantisch äquivalent*, falls $\varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$. Wir schreiben $\varphi \dashv\models \psi$

- **Bemerkung:** $(\Phi \models_{\mathcal{S}} \varphi) \Longleftrightarrow \neg(\text{Erf}_{\mathcal{S}}(\Phi \cup \{\neg\varphi\}))$.

  Beweis: $\Phi \models_{\mathcal{S}} \varphi$ genau dann, wenn jede $\mathcal{S}$-Interpretation, die Modell von Φ ist, Modell von φ ist. Dies ist äquivalent dazu, daß keine $\mathcal{S}$-Interpretation existiert, die Modell von Φ, aber nicht von φ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn keine $\mathcal{S}$-Interpretation existiert, die Modell von Φ und $\neg\varphi$ ist. Dies ist äquivalent zu $\neg\text{Erf}_{\mathcal{S}}\Phi \cup \{\neg\varphi\}$.

(4) Satz: Koinzidenzlemma: Seien $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ Symbolmengen, sei $\mathcal{I}_1 = (\mathfrak{A}_1, \beta_1)$ eine $\mathcal{S}_1$-Interpretation und $\mathcal{I}_2 = (\mathfrak{A}_2, \beta_2)$ eine $\mathcal{S}_2$-Interpretation mit demselben Träger $A_1 = A_2$. Sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

1. Sei t ein $\mathcal{S}$-Term. Falls $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ für die in t auftretenden Symbole aus $\mathcal{S}$ und die in t auftretenden Variablen übereinstimmen, d.h. $s^{\mathfrak{A}_1} = s^{\mathfrak{A}_2}$ für alle $s \in \mathcal{S}$, die in t auftreten, und ebenso $\mathcal{I}_1(x) = \mathcal{I}_2(x)$ für alle $x \in \text{var}(t)$, so gilt $\mathcal{I}_1(t) = \mathcal{I}_2(t)$.
2. Sei φ eine $\mathcal{S}$-Formel. Falls $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ für die in φ auftretenden Symbole (aus $\mathcal{S}$) und die in φ frei auftretenden Variablen übereinstimmen, so gilt $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Beweis:

1. Induktion über den Rang von t:
   - Sei $t = x \in \{v_0, v_1, \ldots\}$. Dann gilt $\mathcal{I}_1(x) = \mathcal{I}_2(x)$ direkt nach Voraussetzung.
   - Sei $t = c$ (Konstante), wieder gilt nach Voraussetzung $\mathcal{I}_1(c) = c^{\mathfrak{A}_1} = c^{\mathfrak{A}_2} = \mathcal{I}_2(c)$.

– Sei $t = ft_0 \ldots t_{n-1}$ und f ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(t) &= f^{\mathfrak{A}_1}\big(\mathcal{I}_1(t_0), \ldots, \mathcal{I}_1(t_{n-1})\big) \\ &\overset{\text{IV}}{=} f^{\mathfrak{A}_1}\big(\mathcal{I}_2(t_0), \ldots, \mathcal{I}_2(t_{n-1})\big) \\ &= f^{\mathfrak{A}_2}\big(\mathcal{I}_2(t_0), \ldots, \mathcal{I}_2(t_{n-1})\big) \\ &= \mathcal{I}_2(t) \end{aligned}$$

2. – Sei $\varphi = t_0 \equiv t_1$, es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 \models t_0 \equiv t_1 &\iff \mathcal{I}_1(t_0) = \mathcal{I}_1(t_1) \\ &\iff \mathcal{I}_2(t_0) = \mathcal{I}_2(t_1) \\ &\iff \mathcal{I}_2 \models t_0 \equiv t_1 \end{aligned}$$

– Sei $\varphi = Rt_0 \ldots t_{n-1}$, analog zu eben

– Sei $\varphi = \neg\psi$, dann ist

$$\mathcal{I}_1 \models \neg\psi \iff \mathcal{I}_1 \not\models \psi \iff \mathcal{I}_2 \not\models \psi \iff \mathcal{I}_2 \models \neg\psi$$

– Sei $\varphi = \psi \vee \chi$, analog zu eben

– Sei $\varphi = \exists x\psi$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 \models \exists x\psi &\iff \exists\, a \in A_1 \,:\, \mathcal{I}_1\frac{a}{x} \models \psi \\ &\iff \exists\, a \in A_2 \,:\, \mathcal{I}_1\frac{a}{x} \models \psi \\ &\overset{(\star)}{\iff} \exists\, a \in A_2 \,:\, \mathcal{I}_2\frac{a}{x} \models \psi \\ &\iff \mathcal{I}_2 \models \exists x\psi \end{aligned}$$

$(\star)$ Nach Voraussetzung über $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ und wegen $\text{frei}(\psi) \subseteq \text{frei}(\varphi) \cup \{x\}$ und $\mathcal{I}_1\frac{a}{x}(x) = a = \mathcal{I}_2\frac{a}{x}(x)$ stimmen $\mathcal{I}_1\frac{a}{x}$ und $\mathcal{I}_2\frac{a}{x}$ für alle in ψ vorkommenden Symbole und frei auftretenden Variablen überein. Die Induktionsvoraussetzung ist anwendbar.

- **Beispiel:** Seien t ein $\mathcal{S}$-Term, φ eine $\mathcal{S}$-Formel und $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine $\mathcal{S}$-Interpretation. Sei $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Für den Wahrheitswert von $\mathcal{I} \models \varphi$ und den Wert von $\mathcal{I}(t)$ entscheidend sind lediglich $\mathfrak{A}$ und die Werte $a_0 := \beta(v_0), \ldots, a_{n-1} := \beta(v_{n-1})$. Deshalb schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ und $t^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ anstelle von $\mathcal{I} \models \varphi$ bzw. $\mathcal{I}(t)$.

  Falls φ ein Satz ist, so schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi$ statt $\mathcal{I} \models \varphi$ und sagen „$\mathfrak{A}$ ist ein Modell für φ“; ebenso für $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$.

- **Definition:** Seien $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ Symbolmengen mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Seien $\mathfrak{A} = (A, \mathsf{a})$ eine $\mathcal{S}$-Struktur und $\mathfrak{A}' = (A', \mathsf{a}')$ eine $\mathcal{S}'$-Struktur. Wir nennen $\mathfrak{A}$ ein *Redukt* von $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}'$ eine *Expansion* von $\mathfrak{A}$, falls $A = A'$ und $\mathsf{a}(s) = \mathsf{a}'(s)$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Wir schreiben $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \mathcal{S}$.

  Beispiel: $\mathcal{S}_{\text{Ar}} \subseteq \mathcal{S}_{\text{Ar}}^{<}$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{<} \restriction \mathcal{S}_{\text{Ar}}$.

(5) **Korollar:** Seien $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ Symbolmengen. Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Dann ist Φ $\mathcal{S}$-erfüllbar genau dann, wenn Φ $\mathcal{S}'$-erfüllbar ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Es gelte $\text{Erf}_{\mathcal{S}}\Phi$. Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine $\mathcal{S}$-Interpretation mit $\mathcal{I} \models_{\mathcal{S}} \Phi$. Sei $\mathfrak{A}'$ eine beliebige $\mathcal{S}'$-Struktur mit $\mathfrak{A}' \restriction \mathcal{S} = \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathcal{I}' := (\mathfrak{A}', \beta)$ eine $\mathcal{S}'$-Interpretation. Nach Koinzidenzlemma gilt $\mathcal{I}' \models \Phi$, somit ist $\text{Erf}_{\mathcal{S}'}\Phi$ gezeigt.

„$\Leftarrow$" Sei $\text{Erf}_{\mathcal{S}'}\Phi$. Sei $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}', \beta)$ eine $\mathcal{S}'$-Interpretation mit $\mathcal{I}' \models \Phi$. Setze $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}' \restriction \mathcal{S}$ und $\mathcal{I} := (\mathfrak{A}, \beta)$. Dann ist $\mathcal{I}$ eine $\mathcal{S}$-Interpretation und mit Satz (4) folgt $\mathcal{I} \models \Phi$.

Bemerkung: Wir dürfen bei $\models_{\mathcal{S}}$ bzw. $\text{Erf}_{\mathcal{S}}$ das $\mathcal{S}$ weglassen.

- **Definition:** Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{S}$-Strukturen. Eine Abbildung $\pi : A \to B$ heißt *Isomorphismus* von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, geschrieben $\pi : \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, falls gelten:

  1. π ist bijektiv
  2. Für jedes n-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{S}$ und alle $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ gilt: $R^{\mathfrak{A}} a_0 \ldots a_{n-1}$ genau dann, wenn $R^{\mathfrak{B}} \pi(a_0) \ldots \pi(a_{n-1})$.
  3. Für jedes n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{S}$ und alle $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ gilt: $\pi\big(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})\big) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_0) \ldots \pi(a_{n-1}))$.
  4. Für jede Konstante $c \in \mathcal{S}$ gilt $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

  Wir nennen dann $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe Strukturen.

- **Beispiel:** Sei $\mathcal{S} = \{R, f, c\}$ (mit R und f zweistellige Relations- und Funktionszeichen und c Konstante). Die folgenden $\mathcal{S}$-Strukturen sind isomorph: $(\mathbb{R}, +, \leq, 0)$ und $(\mathbb{R}^+, \cdot, \leq, 1)$ mit dem folgenden Isomorphismus:

  $$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ mit } x \mapsto e^x$$

  Dann ist $\pi(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \pi(x) \cdot \pi(y)$ und $x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y$

(6a) Satz: Isomorphielemma: Falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe $\mathcal{S}$-Strukturen sind, so gilt für alle $\mathcal{S}$-Sätze: $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Beweis: Sei $\pi : \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Sei β eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Sei $\beta^\pi := \pi \circ \beta$. Dann ist β^π eine Belegung in $\mathfrak{B}$. Seien $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ und $\mathcal{I}^\pi = (\mathfrak{B}, \beta^\pi)$. Wir zeigen nun folgendes:

1. Für alle $\mathcal{S}$-Terme t gilt: $\pi(\mathcal{I}(t)) = \mathcal{I}^\pi(t)$.
2. Für alle $\varphi \in \mathcal{L}^\mathcal{S}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{I}^\pi \models \varphi$.

Aus (2) folgt sofort die Behauptung.

1. Induktion über den Rang von t.
   - $t = x$: $\pi(\mathcal{I}(t)) = \pi(\beta(x)) = \beta^\pi(x) = \mathcal{I}^\pi(t)$
   - $t = c$: $\pi(\mathcal{I}(c)) = \pi(c^\mathfrak{A}) = c^\mathfrak{B} = \mathcal{I}^\pi(t)$
   - $t = ft_0 \dots t_{n-1}$:

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{I}(t)) &= \pi(f^\mathfrak{A}(\mathcal{I}(t_0), \dots, \mathcal{I}(t_{n-1}))) \\ &= f^\mathfrak{B}(\pi(\mathcal{I}(t_0)), \dots, \pi(\mathcal{I}(t_{n-1}))) \\ &\overset{\text{IV}}{=} f^\mathfrak{B}(\mathcal{I}^\pi(t_0), \dots, \mathcal{I}^\pi(t_{n-1}))\end{aligned}$$

2. Wir beweisen (2) für beliebiges β durch Induktion über Rang(φ).
   - $\varphi = t_0 \equiv t_1$: $\mathcal{I} \models t_0 \equiv t_1$ genau dann, wenn $\mathcal{I}(t_0) = \mathcal{I}(t_1)$, dies ist wegen der Injektivität von π äquivlaent zu $\pi(\mathcal{I}(t_0)) = \pi(\mathcal{I}(t_1))$. Nach (1) ist dies äquivalent zu $\mathcal{I}^\pi(t_0) = \mathcal{I}^\pi(t_1)$ genau dann, wenn $\mathcal{I}^\pi \models t_0 \equiv t_1$.
   - $\varphi = Rt_0 \dots t_{n-1}$: $\mathcal{I} \models Rt_0 \dots t_{n-1}$ genau dann, wenn $\mathcal{I}(t_0) \dots \mathcal{I}(t_{n-1}) \in R^\mathfrak{A}$, mit Isomorphismus genau dann, wenn $\pi(\mathcal{I}(t_0)) \dots \pi(\mathcal{I}(t_{n-1})) \in R^\mathfrak{B}$. Dies ist wieder laut (1) genau dann der Fall, wenn $\mathcal{I}^\pi(t_0) \dots \mathcal{I}^\pi(t_{n-1}) \in R^\mathfrak{B}$. Dies ist äquivalent zu $\mathcal{I}^\pi \models Rt_0 \dots t_{n-1}$.
   - $\varphi = \exists x\psi$: $\mathcal{I} \models \exists x\psi$ genau dann, wenn ein $a \in A$ existiert mit $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \psi$; dies ist nach Induktionsvoraussetzung genau dann, wenn ein $a \in A$ existiert mit $(\mathcal{I}\frac{a}{x})^\pi \models \psi$. Wie unten gezeigt wird, ist dies äquivalent dazu, daß ein $a \in A$ existiert mit $(\mathcal{I}^\pi)\frac{\pi(a)}{x} \models \psi$. Da π surjektiv, ist dies genau dann der Fall, wenn ein $b \in B$ existiert mit $(\mathcal{I}^\pi)\frac{b}{x} \models \psi$. Damit ist $\mathcal{I}^\pi \models \exists x\psi$.

Die oben verwendete Gleichheit gilt wegen:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}\frac{a}{x})^{\pi} &= (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x})^{\pi} \\
&= (\mathfrak{B}, \pi \circ (\beta\frac{a}{x})) \\
&\overset{(\star)}{=} (\mathfrak{B}, (\pi \circ \beta)\frac{\pi(a)}{x}) \\
&= (\mathfrak{B}, (\pi \circ \beta)\frac{\pi(a)}{x}) \\
&= \mathcal{I}^{\pi}\frac{\pi(a)}{x}
\end{aligned}$$

Wobei $(\star)$ gilt wegen

- ∗ für $y \neq x$ ist $(\pi \circ \beta\frac{a}{x})(y) = \pi(\beta\frac{a}{x}(y)) = \pi(\beta(y)) = (\pi \circ \beta)(y) = ((\pi \circ \beta)\frac{\pi(a)}{x})(y)$
- ∗ für $y = x$ ist $(\pi \circ \beta\frac{a}{x})(y) = \pi(\beta\frac{a}{x}(y)) = \pi(a) = ((\pi \circ \beta)\frac{\pi(a)}{x})(y)$

2.2.4 Substitution

- Sei $\varphi = \exists v_0 \neg v_1 \equiv v_0$. Dann ist v_1 die einzige freie Variable von φ. Dabei sagt φ also über v_1 etwas aus, nämlich „v_1 ist nicht das einzige Objekt.“ Wir können nun v_1 durch einen Term t ersetzen. Dabei soll die entstehende Formel dasselbe über t aussagen wie vorher über v_1: „t ist nicht das einzige Objekt.“

  Beispiel[5]: $t = fv_2$ (wobei f ein einstelliges Funktionszeichen sei). Substitution liefert: $\exists v_0 \neg fv_2 \equiv v_0$. So eine Substitution ist erlaubt. Falls aber z.B. $t = fv_0$, so liefert die naive Substitution $\exists v_0 \neg fv_0 \equiv v_0$. Diese Formel besagt jedoch nicht nur, daß fv_0 nicht das einzige Objekt ist, sondern z.B. auch noch: „f ist nicht die Identität.“ Diese Substitution ist deshalb nicht erlaubt, weil dabei die Variable v_0 in t in den Wirkungsbereich von $\exists v_0$ gerät.

  Um im letzten Fall die Substitution legal zu machen, ersetzen wir zusätzlich die gebundene Variable v_0, und erhalten $\exists v_2 \neg fv_0 \equiv v_2$.

- **Definition:**

[5] noch klarer mit $t = v_0$, dann liefert die naive Substitution direkt $\exists v_0 \neg v_0 \equiv v_0$.

1. Seien $x_0, \ldots, x_r$ paarweise verschiedene Variablen und seien $t_0, \ldots, t_r$ Terme. Wir definieren für jeden Term t den Term $t\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$ durch[6]:

$$x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \begin{cases} x & \text{falls} \quad x \text{ Konstante} \\ x & \text{falls} \quad x \text{ Variable } \notin \{x_0, \ldots, x_r\} \\ t_i & \text{falls} \quad \exists i \in \{0, \ldots, r\} \ : \ x = x_i \end{cases}$$

$$\text{und} \quad \left[ft'_0 \ldots t'_{n-1}\right] \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = f\left[t'_0 \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \ldots \left[t'_{n-1}\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right]$$

2. Seien $x_0, \ldots, x_r$ paarweise verschiedene Variablen und seien $t_0, \ldots, t_r$ Terme. Wir definieren für jede Formel φ rekursiv $\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$:

$$\begin{aligned} [t'_0 \equiv t'_1] \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} &= \left[t'_0 \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \equiv \left[t'_1 \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \\ \left[Rt'_0 \ldots t'_{n-1}\right] \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} &= R\left[t'_0 \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \ldots \left[t'_{n-1}\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \\ [\neg\varphi] \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} &= \neg\left[\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \\ [(\varphi \vee \psi)] \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} &= \left(\left[\varphi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \vee \left[\psi\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right]\right) \end{aligned}$$

   Interessant ist der Fall $[\exists x\varphi] \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}$: Seien dazu $x_{i_0}, \ldots, x_{i_{s-1}}$ (wobei $0 \leq i_0 < \ldots < i_{s-1} \leq r$) genau die Variablen unter $x_0, \ldots, x_r$ mit $x_i \in \text{frei}(\exists x\varphi)$ und $x_i \neq t_i$. Sei jetzt u die Variable x, falls x in keinem $t_{i_0}, \ldots, t_{i_{s-1}}$ auftritt, und sonst die erste Variable unter $v_0, \ldots, v_n, \ldots$, die nicht in $\exists x\varphi, t_{i_0}, \ldots, t_{i_{s-1}}$ vorkommt. Dann setzen wir

$$[\exists x\varphi] \frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = \exists u\left[\varphi\frac{t_{i_0} \ldots t_{i_{s-1}} u}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}} x}\right]$$

Bemerke, daß im letzten Fall (Existenzquantor) keine der in $t_{i_0}, \ldots, t_{i_{s-1}}$ auftretenden Variablen in den Wirkungsbereich des Quantors $\exists u$ gelangt, weil alle diese von u verschieden sind.

Beispiel: Sei R ein zweistelliges Relationszeichen, f_2 ein zweistelliges,

[6] Die Klammern $[\ldots]$ dienen nur zur Verdeutlichung und gehören nicht zu den eigentlichen Termen bzw. Formeln!

f_3 ein dreistelliges Funktionszeichen.[7]

$$\begin{aligned}
[Rv_0f_2v_1v_2]\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3} &= R\left[v_0\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}\right]\left[[f_2v_1v_2]\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}\right] \\
&= Rv_0f_2\left[v_1\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}\right]\left[v_2\frac{v_2v_0v_1}{v_1v_2v_3}\right] \\
&= Rv_0f_2v_2v_0 \\
[\exists v_0Rv_0fv_1v_2v_3]\frac{v_0v_2v_4v_0}{v_1v_2v_0v_3} &= \exists v_4\left[[Rv_0fv_1v_2v_3]\frac{v_0v_0v_4}{v_1v_3v_0}\right] \\
&= \exists v_4Rv_4fv_0v_2v_0
\end{aligned}$$

- Wann gilt $\mathcal{I} \models \varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}$? Intuitiv sollte dies genau dann der Fall sein, wenn $\mathcal{I}' \models \varphi$, wobei $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}, \beta')$ und $\beta'(x_i) = \mathcal{I}(t_i)$ für alle i. Dies führt zur folgenden

  Definition (Verallgemeinerung von $\mathcal{I}\frac{a}{x}$): Seien $x_0, \ldots, x_r$ paarweise verschiedene Variablen, sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine Interpretation und seien $a_0, \ldots, a_r \in A$. Dann ist $\beta\frac{a_0\ldots a_r}{x_0\ldots x_r}$ die Belegung in $\mathfrak{A}$ definiert durch

$$\beta\frac{a_0\ldots a_r}{x_0\ldots x_r} = \begin{cases} \beta(y) & \text{falls} \quad y \notin \{x_0, \ldots, x_r\} \\ a_i & \text{falls} \quad y = x_i \end{cases}$$

  Weiter sei $\mathcal{I}\frac{a_0\ldots a_r}{x_0\ldots x_r} = (\mathfrak{A}, \beta\frac{a_0\ldots a_r}{x_0\ldots x_r})$.

(6b) Satz: Substitutionslemma: Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation, seien $x_0, \ldots, x_r$ paarweise verschiedene Variablen und $t_0, \ldots, t_r$ Terme.

1. Für alle Terme t gilt:

$$\mathcal{I}\left(t\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r}\right) = \left[\mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_0)\ldots\mathcal{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}\right](t)$$

2. Für alle Formeln φ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi\frac{t_0\ldots t_r}{x_0\ldots x_r} \quad \text{g.d.w.} \quad \left[\mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_0)\ldots\mathcal{I}(t_r)}{x_0\ldots x_r}\right] \models \varphi$$

Beweis (exemplarisch nur zwei interessante Fälle):

1. Sei $t = x$.

[7] im zweiten Beispiel: $s = 2; x_{i_0} = v_1; x_{i_1} = v_3; i_0 = 0; i_1 = 3; t_{i_0} = v_0; t_{i_1} = v_0; u = v_4$

(a) Falls $x \notin \{x_0, \ldots, x_r\}$, ist $x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = x$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\left(x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right) &= \mathcal{I}(x) = \beta(x) \\
&= \left[\beta\frac{\mathcal{I}(t_0) \ldots \mathcal{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}\right](x) \\
&= \left[\mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_0) \ldots \mathcal{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}\right](x)
\end{aligned}$$

(b) Falls $x = x_i$ für ein $0 \leq i \leq r$ ist, so ist $x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r} = t_i$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\left(x\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right) &= \mathcal{I}(t_i) = \beta(t_i) \\
&= \left[\beta\frac{\mathcal{I}(t_0) \ldots \mathcal{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}\right](x) \\
&= \left[\mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_0) \ldots \mathcal{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}\right](x)
\end{aligned}$$

2. Sei $\varphi = \exists x\psi$, sei $x_{i_0}, \ldots, x_{i_{s-1}}$ genau die Variablen x_i mit $x_i \in \text{frei}(\varphi)$ und $x_i \neq t_i$. Sei $u = x$, falls $x \notin \text{var}(t_{i_0}) \cup \ldots \cup \text{var}(t_{i_{s-1}})$; sonst sei u die erste nicht in $t_{i_0}, \ldots, t_{i_{s-1}}$ und ψ auftretende Variable. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& & &\mathcal{I} \models \left[[\exists x\psi]\,\frac{t_0 \ldots t_r}{x_0 \ldots x_r}\right] \\
&\text{(Def) g.d.w.} & &\mathcal{I} \models \exists u\left[\psi\frac{t_{i_0} \ldots t_{i_{s-1}} u}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}} x}\right] \\
&\text{g.d.w.} & &\text{es ex. } a \in A \text{ mit } \mathcal{I}\frac{a}{u} \models \left[\psi\frac{t_{i_0} \ldots t_{i_{s-1}} u}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}} x}\right] \\
&\text{(IV) g.d.w.} & &\text{es ex. } a \in A \text{ mit } \left[\left[\mathcal{I}\frac{a}{u}\right]\frac{\mathcal{I}\frac{a}{u}(t_{i_0}) \ldots \mathcal{I}\frac{a}{u}(t_{i_{s-1}})\mathcal{I}\frac{a}{u}(u)}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}} x}\right] \models \psi \\
&\text{(Koinz) g.d.w.} & &\text{es ex. } a \in A \text{ mit } \left[\left[\mathcal{I}\frac{a}{u}\right]\frac{\mathcal{I}(t_{i_0}) \ldots \mathcal{I}(t_{i_{s-1}})a}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}} x}\right] \models \psi \\
&\text{g.d.w.} & &\text{es ex. } a \in A \text{ mit } \left[\mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_{i_0}) \ldots \mathcal{I}(t_{i_{s-1}})a}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}} x}\right] \models \psi \\
&\text{g.d.w.} & &\left[\mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_{i_0}) \ldots \mathcal{I}(t_{i_{s-1}})}{x_{i_0} \ldots x_{i_{s-1}}}\right] \models \exists x\psi \\
&\text{g.d.w.} & &\left[\mathcal{I}\frac{\mathcal{I}(t_0) \ldots \mathcal{I}(t_r)}{x_0 \ldots x_r}\right] \models \exists x\psi
\end{aligned}$$

Zur letzten Äquivlaenz: Für $i \notin \{i_0, \dots, i_{s-1}\}$ gilt *entweder* $x_i \notin \text{frei}(\varphi)$, somit gilt nach Koinzidenzlemma $\mathcal{I}' \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{I}'\frac{a}{x_i} \models \varphi$ für beliebige $a \in A$; *oder* $x_i = t_i$ und damit $\mathcal{I}'(x_i) = \mathcal{I}'(t_i)$ und $\mathcal{I}' = \mathcal{I}'\frac{\mathcal{I}'(t_i)}{x_i}$ für beliebige Interpretationen $\mathcal{I}'$.

2.3 Ein Sequenzenkalkül

2.3.1 Definitionen

- Sei $\mathcal{S}_{Gr}$ Signatur der Gruppen und Φ_{Gr} die Menge der drei Gruppenaxiome. Für die Gruppentheorie interessant sind Sätze $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{Gr}}$, die in allen Gruppen gelten, d.h. $\Phi_{Gr} \models \varphi$. Dazu „beweist“ man φ aus Φ_{Gr}. Was heißt „beweisen“? Ist es so, daß jedes φ mit $\Phi_{Gr} \models \varphi$ auch bewiesen werden kann?

  Intuitiv ist ein „Beweis“ von φ aus Φ im wesentlichen eine endliche Folge $\varphi_0 \cdots \varphi_n$ von Sätzen, so daß $\varphi_n = \varphi$ und jedes φ_i entweder zu Φ gehört oder sonst aufgrund von *logisch/mathematisch korrekten Schlussregeln* aus früheren $\varphi_{j_0}, \dots, \varphi_{j_l}$ (mit $j_r < i$) folgt.

  Im folgenden wollen wir präzisieren, welche Schlussregeln wir erlauben.

- **Definition:** Unter einer *Sequenz* verstehen wir eine endliche nichtleere Folge von Formeln (Symbolmenge $\mathcal{S}$ sei fixiert). Sei $\varphi_0 \cdots \varphi_{n-1}\varphi_n$ eine Sequenz. Dann heißt die Folge $\varphi_0 \cdots \varphi_{n-1}$ *Antezedenz* und φ_n heißt *Sukzedenz* dieser Sequenz $\varphi_0, \dots, \varphi_n$. Eine Sequenz $\varphi_0 \cdots \varphi_n$ heißt *korrekt*, falls $\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\} \models \varphi_n$. Mit Δ, Γ bezeichnen wir (möglicherweise leere) endliche Folgen von Formeln.

  Im folgenden wollen wir nun definieren, welche Sequenzen (verkürzte) Beweise sein sollen. Dies geschieht rekursiv durch ein Kalkül, dem sogenannten Sequenzenkalkül. Beweise sollen natürlich immer korrekte Sequenzen sein.

- Der Sequenzenkalkül besteht aus verschiedenen Regeln, die zum einen angeben, welches die einfachsten Beweise sind (Primbeweise) und zum anderen sagen, wie man von schon konstruierten Beweisen zu neuen kommt. Diese Regeln sollen *korrekt* sein, d.h. sie sollen von korrekten Sequenzen zu korrekten Sequenzen führen.

2.3.2 Ableitungs-Grundregeln

- **Grundregeln:**

– Antezedenzregel (Ant): Falls Γ ein Glied von Γ' ist (kurz $\Gamma \subseteq \Gamma'$):

$$\frac{\Gamma\,\varphi}{\Gamma'\,\varphi}$$

– Voraussetzungsregeln (Vor): Falls φ ein Glied von Γ ist (kurz $\varphi \in \Gamma$):

$$\frac{}{\Gamma\,\varphi}$$

Junktorenregeln:

– Fallunterscheidungsregel (FU):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\psi\,\varphi\\ \Gamma\neg\psi\,\varphi\end{array}}{\Gamma\,\varphi}$$

– Widerspruchsregel (Wid):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\neg\varphi\,\psi\\ \Gamma\neg\varphi\,\neg\psi\end{array}}{\Gamma\,\varphi}$$

– Regel der $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A):

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\varphi\,\chi\\ \Gamma\psi\,\chi\end{array}}{\Gamma(\varphi\vee\psi)\,\chi}$$

– Regeln der $\vee$-Einführung im Sukzedens ($\vee$S):

$$\text{(a)}\ \frac{\Gamma\varphi}{\Gamma(\varphi\vee\psi)} \qquad \text{(b)}\ \frac{\Gamma\varphi}{\Gamma(\psi\vee\varphi)}$$

Quantoren- und Gleichheitsregeln:

– Regel der $\exists$-Einführung im Sukzedens ($\exists$S): Falls t ein beliebiger Term ist:

$$\frac{\Gamma\,\varphi\frac{t}{x}}{\Gamma\,\exists x\varphi}$$

– Regel der $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A): Falls y eine Variable ist, die nicht frei vorkommt in $\Gamma\exists x\varphi\psi$:

$$\frac{\Gamma\varphi\frac{y}{x}\,\psi}{\Gamma\exists x\varphi\,\psi}$$

– Regel der Reflexivität der Gleichheit ($\equiv$): Für alle Terme t:

$$\frac{}{t \equiv t}$$

– Substitutionsregel für die der Gleichheit (Sub): Für alle Terme t:

$$\frac{\Gamma\, \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma t \equiv t'\, \varphi\frac{t'}{x}}$$

- **Korrektheit:**
  - Zu (Ant): Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma'$ (zu zeigen: $\mathcal{I} \models \varphi$). Da $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ist, folgt $\mathcal{I} \models \Gamma$. Da $\Gamma\varphi$ eine korrekte Sequenz ist, somit $\Gamma \models \varphi$, gilt $\mathcal{I} \models \varphi$.
  - Zu (FU): zu zeigen ist $\Gamma \models \varphi$. Sei dazu $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Es gilt $\mathcal{I} \models \psi$ oder eben nicht, dann aber $\mathcal{I} \models \neg\psi$.
    * Falls $\mathcal{I} \models \psi$: Da $\Gamma\psi\varphi$ korrekt ist, also $\Gamma\psi \models \phi$, folgt $\mathcal{I} \models \varphi$.
    * Falls $\mathcal{I} \models \neg\psi$, verwenden wir die Korrektheit von $\Gamma\neg\psi\varphi$ und erhalten $\mathcal{I} \models \varphi$.
  - Zu ($\exists\mathsf{A}$): Es gelte $\Gamma\varphi\frac{y}{x} \models \psi$ (und die Voraussetzung über y gelte auch). Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma\exists x\varphi$ mit $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$. Wegen $\mathcal{I} \models \exists x\varphi$ existiert $a \in A$ mit $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$. Dann gilt auch $(\mathcal{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x} \models \varphi$, da entweder $x = y$ (klar) oder $x \neq y$ (wir wissen, dass $y \notin \mathrm{frei}(\varphi)$). Wende nun das Koinzidenzlemma an. Wegen $\mathcal{I}\frac{a}{y}(y) = a$ folgt
  $$\left(\mathcal{I}\frac{a}{y}\right)\frac{\mathcal{I}\frac{a}{y}(y)}{x} \models \varphi.$$
  Nach Substitutionslemma gilt $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$ Da $\mathcal{I} \models \Gamma$ und y nicht frei ist in den Formeln von Γ, folgt $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$. Nach Korrektheit von $\Gamma\varphi\frac{y}{x}\psi$ folgt $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \psi$. Da $y \notin \mathrm{frei}(\psi)$ folgt $\mathcal{I} \models \psi$ mit Koinzidenzlemma.
- **Definition:** Eine Sequenz $\Gamma\varphi$ heißt *ableitbar* im Sequenzenkalkül, geschrieben $\vdash \Gamma\varphi$, falls entweder
  1. φ Glied von Γ ist (Vor), oder Γ ist leer und φ ist $t \equiv t$ für einen Term t ($\equiv$), oder
  2. es gibt ableitbare Sequenzen s_1, s_2, so daß

$$\frac{s_1}{\Gamma\,\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}}{\Gamma\,\varphi}$$

von der Gestalt einer unserer Ableitungsregeln (Ant), ($\vee$A), ($\vee$S), ($\exists$A), ($\exists$S), (Sub) bzw. (FU), (Wid) ist.

Definition: Sei Φ eine Formelmenge und φ eine Formel. Dann heißt φ *formal beweisbar* oder *ableitbar* aus Φ, falls endlich viele $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ in Φ existieren mit $\vdash \varphi_0 \cdots \varphi_{n-1}\varphi$. Wir schreiben dann $\Phi \vdash \varphi$. Falls hier Φ leer ist, schreiben wir $\vdash \varphi$.

- **Bemerkung:** Für alle Definitionen (Ableitungsregeln, ableitbare Sequenz, formale Beweisbarkeit) hatten wir zuerst eine beliebige Symbolmenge $\mathcal{S}$ fixiert. Korrekterweise müssten wir $\vdash_{\mathcal{S}}$ verwenden statt $\vdash$. Wir werden das auch tun, falls verschiedene Symbolmengen zugleich auftreten. Der *Gödel'sche Vollständigkeitssatz* besagt, daß $\vdash_{\mathcal{S}}$ und $\models_{\mathcal{S}}$ dieselben Relationen sind. Wie gesehen, ist der Verweis auf $\mathcal{S}$ in $\models_{\mathcal{S}}$ überflüssig, somit auch in $\vdash_{\mathcal{S}}$.

2.3.3 Ableitbare Ableitungsregeln

- Wir zeigen zuerst, daß die einelementige Sequenz $\varphi \vee \neg\varphi$ (für beliebige Formel φ) ableitbar ist:

1.	$\varphi\varphi$	(Vor)
2.	$\varphi(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S)(a) angewendet auf 1
3.	$\neg\varphi\neg\varphi$	(Vor)
4.	$\neg\varphi(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S)(b) angewendet auf 1
5.	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(FU)auf 2, 4

Es folgt $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$, anders gesagt: Die folgende Regel (TND) *(tertium non datum)* kann zu den Regeln des Sequenzkalküls hinzugenommen werden, ohne daß dadurch die Menge der ableitbaren Sequenzen vergrößert würde:

$$\frac{}{(\varphi \vee \neg\varphi)}$$

- Modifizierte Widerspruchsregel (Wid')

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\,\psi\\ \Gamma\,\neg\psi\end{array}}{\Gamma\varphi}$$

Beweis:

1.	$\Gamma\psi$	Prämisse
2.	$\Gamma\neg\varphi\psi$	(Ant) auf 1.
3.	$\Gamma\neg\psi$	Prämisse
4.	$\Gamma\neg\varphi\neg\psi$	(Ant) auf 3.
5.	$\Gamma\varphi$	(Wid) auf 2, 4

- Kettenschlußregel: (KS)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\varphi\\ \Gamma\varphi\psi\end{array}}{\Gamma\psi}$$

Beweis:

1.	$\Gamma\varphi$	Prämisse
2.	$\Gamma\neg\varphi\varphi$	(Ant) auf 1.
3.	$\Gamma\neg\neg\varphi\neg\varphi$	(Vor)
4.	$\Gamma\neg\varphi\psi$	(Wid') auf 2., 3.
5.	$\Gamma\varphi\psi$	Prämisse

- Kontrapositionsregeln (KP)

$$\text{(a)}\ \frac{\Gamma\varphi\,\psi}{\Gamma\neg\psi\,\neg\varphi} \qquad \text{(b)}\ \frac{\Gamma\neg\varphi\,\neg\psi}{\Gamma\psi\,\varphi}$$

$$\text{(c)}\ \frac{\Gamma\neg\varphi\,\psi}{\Gamma\neg\psi\,\varphi} \qquad \text{(d)}\ \frac{\Gamma\varphi\,\neg\psi}{\Gamma\psi\,\neg\varphi}$$

Beweis:

(a)

1.	$\Gamma\varphi\psi$	Prämisse
2.	$\Gamma\neg\psi\varphi\psi$	(Ant) auf 1.
3.	$\Gamma\neg\psi\varphi\neg\psi$	(Vor)
4.	$\Gamma\neg\psi\varphi\neg\varphi$	(Wid') auf 2., 3.
5.	$\Gamma\neg\psi\neg\varphi\neg\varphi$	(Vor)
6.	$\Gamma\neg\psi\neg\varphi$	(FU) auf 4., 5.

- Regel ohne Namen

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma(\varphi\vee\psi)\\ \Gamma\neg\varphi\end{array}}{\Gamma\psi}$$

Beweis:

$$\begin{array}{lll}
1. & \Gamma(\varphi \vee \psi) & \text{Prämisse} \\
2. & \Gamma\neg\varphi & \text{Prämisse} \\
3. & \Gamma\psi\psi & (\mathsf{Vor}) \\
4. & \Gamma\varphi\neg\varphi & (\mathsf{Ant}) \text{ auf 2.} \\
5. & \Gamma\varphi\varphi & (\mathsf{Vor}) \\
6. & \Gamma\varphi\psi & (\mathsf{Wid'}) \text{ auf 4., 5.} \\
7. & \Gamma(\varphi \vee \psi)\psi & (\vee\mathsf{A}) \text{ auf 3., 6.} \\
8. & \Gamma\psi & (\mathsf{KS}) \text{ auf 1., 7.}
\end{array}$$

- Modus ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma(\varphi \to \psi) \\ \Gamma\varphi\end{array}}{\Gamma\psi}$$

Beweis:

$$\begin{array}{lll}
1. & \Gamma(\neg\varphi \vee \psi) & \text{Prämisse} \\
2. & \Gamma\varphi & \text{Prämisse} \\
3. & \Gamma\neg\varphi\varphi & (\mathsf{Ant}) \text{ auf 2.} \\
4. & \Gamma\neg\varphi\neg\varphi & (\mathsf{Vor}) \\
5. & \Gamma\neg\varphi\psi & (\mathsf{Wid'}) \text{ auf 3., 4.} \\
6. & \Gamma\psi\psi & (\mathsf{Vor}) \\
7. & \Gamma(\neg\varphi \vee \psi)\psi & (\vee\mathsf{A}) \text{ auf 5., 6.} \\
8. & \Gamma\psi & (\mathsf{KS}) \text{ auf 1., 7.}
\end{array}$$

- weitere Regel analog zu (MP)

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma(\varphi \vee \psi) \\ \Gamma\neg\varphi\end{array}}{\Gamma\psi}$$

Beweis: analog zu (MP)

- Spezialfall der Regeln ($\exists$S), ($\exists$A), (Sub) mit $x = t$ bzw. $x = y$ (wobei im zweiten Fall x nicht frei in Γ, ψ sein darf):

$$\frac{\Gamma\varphi}{\Gamma\exists x\varphi} \qquad \frac{\Gamma\varphi\psi}{\Gamma\exists x\varphi\psi} \qquad \frac{\Gamma\varphi}{\Gamma x \equiv t\, \varphi\frac{t}{x}}$$

(7) Satz: Korrektheit des Sequenzenkalküls: Für alle $\Phi \subseteq \mathcal{L}^S$ und $\varphi \in \mathcal{L}^S$ gilt: Falls $\Phi \vdash_S \varphi$, so gilt $\Phi \models_S \varphi$ (d.h. wenn φ formal beweisbar ist aus Φ, d.h. es existiert ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ mit $\vdash \Gamma\varphi$ so ist φ auch semantische Konsequenz von Φ).

Beweis: Durch Induktion über die Komplexität der Ableitung von $\Gamma\varphi$ zeigt man: Aus $\vdash \Gamma\varphi$ folgt $\Gamma \models \varphi$:

– Induktionsbeginn: $\Gamma\varphi$ ist Primsequenz. Die schon bewiesene Korrektheit der Primregeln besagt gerade, daß $\Gamma\varphi$ korrekt ist, d.h. daß $\Gamma \models \varphi$.

– Induktionsschritt: Es existieren ableitbare Sequenzen s_1, s_2 und eine Regel des Sequenzkalküls, mittels welcher $\Gamma\varphi$ aus s_1 und s_2 ableitbar ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind s_1 und s_2 korrekt. Da alle Regeln des Sequenzkalküls korrekt sind, ist $\Gamma\varphi$ korrekt, also $\Gamma \models \varphi$.

- **Bemerkung:** Im folgenden (Gödelscher Vollständigkeitssatz) soll die Umkehrung von Satz (7) bewiesen werden.

2.4 Konsistenz und Inkonsistenz

- **Definitionen:**

1. Eine Menge $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ heißt *widerspruchsfrei* oder *konsistent*, falls für keine Formel $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ zugleich gilt: $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi$. Wir schreiben $\mathrm{Wf}_{\mathcal{S}}\Phi$ oder $\mathrm{Con}_{\mathcal{S}}\Phi$.
2. Falls Φ nicht konsistent ist, heißt Φ *widerspruchsvoll* oder *inkonsistent*, Wir schreiben $\mathrm{Wv}_{\mathcal{S}}\Phi$ oder $\neg\mathrm{Con}_{\mathcal{S}}\Phi$.

(8) Lemma: Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ eine Formelmenge. Dann ist $\mathrm{Wv}\Phi$ äquivalent zu: Für alle $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gilt $\Phi \vdash \varphi$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Es gelte $\mathrm{Wv}\Phi$, also existiert $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ mit $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$. Sei nun $\psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ beliebig. Zu zeigen ist $\Phi \vdash \psi$. Nach Voraussetzung existieren endliche Folgen Γ_1 und Γ_2 über Φ, so daß $\vdash \Gamma_1\varphi$ und $\vdash \Gamma_2\neg\varphi$. Wir erhalten folgende Ableitung im Sequenzenkalkül:

1.	$\Gamma_1\varphi$	Prämisse
2.	$\Gamma_2\neg\varphi$	Prämisse
3.	$\Gamma_1\Gamma_2\varphi$	(Ant) auf 1.
4.	$\Gamma_1\Gamma_2\neg\varphi$	(Ant) auf 2.
5.	$\Gamma_1\Gamma_2\psi$	(Wid') auf 3., 4.

Somit gilt $\vdash \Gamma_1\Gamma_2\psi$. Die Folge $\Gamma_1\Gamma_2$ ist eine endliche Folge über Φ. Es folgt $\Phi \vdash \psi$.

„$\Leftarrow$“ trivial

(9) Korollar: Für eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gilt WfΦ genau dann, wenn es ein $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gibt, so daß nicht $\Phi \vdash \varphi$ ($\Phi \nvdash \varphi$).

Nach Definition von $\Phi \vdash \varphi$ gilt dies genau dann, wenn eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert mit $\Phi_0 \vdash \varphi$. Damit erhalten wir:

(10) Lemma: Für alle $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gilt: WfΦ genau dann, wenn WfΦ_0 für jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

(11) Lemma: Jedes erfüllbare $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ ist konsistent.

Beweis: Angenommen, WvΦ. Es gilt also $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Nach Satz (7) folgt $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$. Gäbe es eine $\mathcal{S}$-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$, so wäre $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, somit nicht $\mathcal{I} \models \varphi$, ein Widerspruch. Folglich ist kein $\mathcal{I}$ Modell für Φ. Also ist Φ nicht erfüllbar.

(12) Lemma: Für alle $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gelten:

1. Wenn nicht $\Phi \vdash \varphi$, so gilt Con$(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$.
2. Falls ConΦ und $\Phi \vdash \varphi$, so ist Con$(\Phi \cup \{\varphi\})$.
3. Falls ConΦ, so gilt Con$(\Phi \cup \{\varphi\})$ oder Con$(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$.

Beweis:

1. Es gelte nicht $\Phi \vdash \varphi$. Wäre $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent, so wäre nach Lemma (8) die Sequenz $\Gamma\neg\varphi\varphi$ ableitbar für ein geeignet gewähltes Γ aus Φ. Wir erhalten folgende Ableitung im Sequenzenkalkül:

1.	$\Gamma\neg\varphi\varphi$	Prämisse
2.	$\Gamma\varphi\varphi$	(Vor)
3.	$\Gamma\varphi$	(FU) auf 1., 2.

   Also $\Phi \vdash \varphi$, ein Widerspruch.

2. Es gelten ConΦ und $\Phi \vdash \varphi$. Dann ist natürlich $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ inkonsistent, da trivialerweise $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$, somit $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

   Falls nun auch $\Phi \cup \{\varphi\}$ inkonsistent wäre, könnten wir, wie im eben geführten Beweis, auf $\Phi \vdash \neg\varphi$ schließen, also erhielten wir, daß Φ inkonsistent ist, ein Widerspruch.

3. Folgt aus (1) und (2): Falls nicht $\Phi \vdash \varphi$, so folgt Con$(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$ mit (1), falls $\Phi \vdash \neg\varphi$, folgt Con$(\Phi \cup \{\varphi\})$ mit (2).

(13) Lemma: Für $n \in \mathbb{N}$ seien Symbolmengen $\mathcal{S}_n$ gegeben mit $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{S}_n \subseteq \ldots$. Außerdem sei zu jedem n eine Menge $\Phi_n \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}_n}$ gegeben, so daß $\mathrm{Con}_{\mathcal{S}_n}\Phi_n$ und $\Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \ldots \subseteq \Phi_n \subseteq \ldots$ Ferner sei $\mathcal{S} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ und $\Phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$. Dann gilt $\mathrm{Con}_{\mathcal{S}}\Phi$.

Beweis: Angenommen nicht, es gelte also $\mathrm{Wv}_{\mathcal{S}}\Phi$. Wegen Lemma (10) gilt dann schon $\mathrm{Wv}_{\mathcal{S}}\Psi$ für eine endliche Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$. Da Ψ endlich ist, existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\Psi \subseteq \Phi_k$. Es folgt $\mathrm{Wv}_{\mathcal{S}}\Phi_k$. Wegen Lemma (8) (mit $\varphi = v_0 \equiv v_0$) erhalten wir $\Phi_k \vdash_{\mathcal{S}} v_0 \equiv v_0$ und $\Phi_k \vdash_{\mathcal{S}} \neg v_0 \equiv v_0$. Es existieren somit endliche Formeln Γ_1, Γ_2 über Φ_k mit $\vdash_{\mathcal{S}} \Gamma_1 v_0 \equiv v_0$ und $\vdash_{\mathcal{S}} \Gamma_2 \neg v_0 \equiv v_0$. Betrachte folgende Ableitungen im Sequenzkalkül zur Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$:

$$\begin{array}{cc}
s_1^0 & s_2^0 \\
s_1^1 & s_2^1 \\
\vdots & \vdots \\
s_1^{n-1} & s_1^{m-1} \\
\Gamma_1 v_0 \equiv v_0 & \Gamma_2 \neg v_0 \equiv v_0
\end{array}$$

Damit bestehen Γ_1 und Γ_2 aus endlich vielen $\mathcal{S}$-Formeln in Φ_k. Jede Zeile s_j^i enthält endlich viele Formeln aus $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$; darin treten nur endlich viele Symbole auf. Folglich existiert $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq k$, so daß $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}_l}$ und $s_j^i \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}_l}$ für alle i, j. Folglich sind die beiden obigen Ableitungen Ableitungen im Sequenzenkalkül der Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_l}$. Es folgt $\mathrm{Wv}_{\mathcal{S}_l}\Phi_l$, ein Widerspruch.

2.5 Der Gödel'sche Vollständigkeitssatz

2.5.1 Vorüberlegungen

- Nach Satz (7) gilt für alle $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$: Falls $\Phi \vdash_s \varphi$, so ist $\Phi \models \varphi$. Der Vollständigkeitssatz besagt die Umkehrung davon:

  ($\star$) Falls $\Phi \models \varphi$, so $\Phi \vdash \varphi$.

  Um ($\star$) zu beweisen, zeigen wir:

  ($\star\star$) Jede konsistente Menge $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ ist erfüllbar.

  Warum gilt ($\star\star$) $\Rightarrow$ ($\star$)? Angenommen, es gelte $\Phi \models \varphi$, aber nicht $\Phi \vdash \varphi$. Nach Lemma (12a) folgt $\mathrm{Con}(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$. Nach (**) wäre $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar, es existiert also eine $\mathcal{S}$-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$, ein Widerspruch zu $\Phi \models \varphi$.

- **Definition:** Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$.

1. Φ heißt *maximal konsistent* (im Buch *negationstreu*), falls ConΦ und für jede Formel $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \setminus \Phi$ ist Wv$(\Phi \cup \{\varphi\})$.
2. Φ *enthält Zeugen*, falls für jede $\mathcal{S}$-Formel der Form $\exists x \varphi$ ein $\mathcal{S}$-Term t existiert so daß die Formel $(\exists x \varphi \rightarrow \varphi\frac{t}{x})$ zu Φ gehört.

Beispiele:

1. Sei $\mathcal{I}$ eine $\mathcal{S}$-Interpretation. Sei $\Phi = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \mid \mathcal{I} \models \varphi \right\}$ $(= \mathrm{Th}(\mathcal{I}))$. Dann ist Φ maximal konsistent. Sei nämlich $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}} \setminus \Phi$, dann gilt nicht, daß $\mathcal{I} \models \varphi$, somit $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, also $\neg\varphi \in \Phi$. Klarerweise ist dann $\Phi \cup \{\varphi\}$ inkonsistent. Im allgemeinen enthält ein solches Φ nicht Zeugen:
2. Sei $\mathcal{S} = \{f\}$, f einstelliges Funktionszeichen, φ sei $f v_0 \equiv v_0$. Definiere $\mathcal{I}$ durch $A = \{0, 1, 2\}$; $f^A(0) = 0$, $f^A(1) = 2$ und $f^A(2) = 1$. Sei β: $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow A$ definiert durch $\beta(v_n) = 1$ für alle n. Sei $\Phi = \left\{ \psi \in \mathcal{L}^{\{f\}} \mid \mathcal{I} \models \psi \right\}$. Wir wissen, daß Φ maximal konsistent ist, wir wollen einsehen, daß Φ nicht Zeugen enthält.

   Klarerweise gilt $\mathcal{I} \models \exists v_0 \varphi$, da $\mathcal{I}\frac{0}{v_0} \models \varphi$. Aber für keinen Term t gilt $\mathcal{I} \models \varphi\frac{t}{v_0}$. Dazu zeigen wir zuerst durch Induktion über den Termaufbau: $\mathcal{I}(t) \neq 0$, denn $\mathcal{I}(v_n) = \beta(v_n) = 1 \neq 0$. Zudem $\mathcal{I}(ft') = f^A(\mathcal{I}(t')) \in \{1, 2\}$. Nun gilt $\mathcal{I} \models \varphi\frac{t}{v_0}$ genau dann, wenn $\mathcal{I} \models ft \equiv t$, dies ist äquivalent zu $\mathcal{I}(ft) = \mathcal{I}(t)$. Dies ist $f^A(\mathcal{I}(t)) = \mathcal{I}(t)$, dies gilt jedoch nie, da $\mathcal{I}(t) \neq 0$. Also gilt für keinen Term t: $\mathcal{I} \models \exists v_0 \varphi \rightarrow \varphi\frac{t}{v_0}$, also enthält Φ keine Zeugen.

- **Beweis** von (**): Sei jetzt $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ konsistent. Wir wollen eine Interpretation $\mathcal{I}$ konstruieren mit $\mathcal{I} \models \Phi$. Als Baumaterial für $\mathcal{I}$ haben wir nichts anders zur Verfügung als die Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ mit den in ihr auftretenden Termen.

  Erster natürlicher Versuch: Der Träger A von $\mathcal{I}$ sei $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ die Menge aller $\mathcal{S}$-Terme. Als Belegung wählen wir $\beta(v_n) = v_n$. Sei nun R ein (z.B.) einstelliges Relationszeichen. Nehme $R^A = \{t \in A \mid Rt \in \Phi\}$. Sei f ein (z.B.) einstelliges Funktionszeichen. Nehme $f^A(t) = s$, so daß $ft \equiv s \in \Phi$. Aber: Gibt es so ein s? Ja, falls Φ maximal konsistent ist: $ft \equiv ft \in \Phi$ (da allgemeingültig). Aber möglicherweise existieren noch andere Terme s mit $s \neq ft$ und $ft \equiv s \in \Phi$.

  Problem: Dann auch $f^A(t) = s$, somit f^A nicht wohldefiniert. **Ausweg:** Identifiziere s und ft und .... D.h. wir definieren auf $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ und nehmen als Träger von $\mathcal{I}$ nicht $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$, sondern $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}/v$

(14) Lemma: Sei Φ maximal konsistent und enthalte Zeugen. Dann gelten für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$:

1. Wenn $\Phi \vdash \varphi$, so ist $\varphi \in \Phi$.
2. Entweder $\varphi \in \Phi$ oder $\neg\varphi \in \Phi$.
3. $(\varphi \vee \psi) \in \Phi$ genau dann, wenn $\varphi \in \Phi$ oder $\psi \in \Phi$.
4. Wenn $(\varphi \to \psi) \in \Phi$ und $\varphi \in \Phi$, so $\psi \in \Phi$.
5. Genau dann ist $\exists x\varphi \in \Phi$, wenn es einen Term $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ gibt mit $\varphi\frac{t}{x} \in \Phi$.

Beweis:

1. Da ConΦ und $\Phi \vdash \varphi$ gelten, folgt nach Lemma (12b) auch Con$(\Phi \cup \{\varphi\})$. Da Φ maximal konsistent ist, folgt $\varphi \in \Phi$.
2. Nach Lemma (12c) gilt Con$(\Phi \cup \{\varphi\})$ oder Con$(\Phi \cup \{\neg\varphi\})$. Wegen Maximalität von Φ folgt $\varphi \in \Phi$ oder $\neg\varphi \in \Phi$. Da Φ konsistent ist, gilt genau eines davon.

3.„$\Rightarrow$“ Sei $(\varphi \vee \psi) \in \Phi$. Wir haben folgende Ableitung im Sequenzenkalkül:

1.	$(\varphi \vee \psi)\neg\varphi(\varphi \vee \psi)$	(Vor)
2.	$(\varphi \vee \psi)\neg\varphi\neg\varphi$	(Vor)
3.	$(\varphi \vee \psi)\neg\varphi\psi$	(MP) (erweiterte Version) auf 1., 2.

Also gilt $\vdash (\varphi \vee \psi)\neg\varphi\psi$. Falls $\varphi \in \Phi$ sind wir fertig. Angenommen, $\varphi \notin \Phi$. Wegen (2) gilt $\neg\varphi \in \Phi$. Es folgt $\Phi \vdash \psi$. Mit (1) folgt $\psi \in \Phi$.

„$\Leftarrow$“ Sei z.B. $\varphi \in \Phi$ (der Fall $\psi \in \Phi$ ist analog). Wir haben die Ableitungsregel ($\vee$S) mit $\Gamma = \emptyset$, folglich $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$, also mit (1) gilt $(\varphi \vee \psi) \in \Phi$.

4. Angenommen, es gelte $(\neg\varphi \vee \psi)$, $\varphi \in \Phi$. Es gilt $\vdash (\neg\varphi \vee \psi)\varphi\psi$.

1.	$(\neg\varphi \vee \psi)\varphi(\neg\varphi \vee \psi)$	(Vor)
2.	$(\neg\varphi \vee \psi)\varphi\varphi$	(Vor)
3.	$(\neg\varphi \vee \psi)\varphi\psi$	(MP) auf 1., 2.

Es folgt $\Phi \vdash \psi$, also $\psi \in \Phi$ mit (1).

5.„$\Rightarrow$“ Angenommen, es gelte $\exists x\varphi \in \Phi$. Da Φ Zeugen enthält, gibt es einen Term t, so daß $(\exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}) \in \Phi$. Aus (4) folgt $\varphi\frac{t}{x} \in \Phi$.

„$\Leftarrow$“ Es sei $\varphi\frac{t}{x} \in \Phi$ für einen Term t. Wegen ($\exists$S) gilt $\vdash \varphi\frac{t}{x}\exists x\varphi$.

1.	$\varphi\frac{t}{x}\,\varphi\frac{t}{x}$	(Vor)
2.	$\varphi\frac{t}{x}\,\exists x\varphi$	$(\exists\mathsf{S})$

Es folgt $\Phi \vdash \exists x\varphi$, somit $\exists x\varphi \in \Phi$ wegen (1).

2.5.2 Definition der Terminterpretation

- Sei jetzt $\Phi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ maximal konsistent, so daß Φ Zeugen enthält. Wir wollen eine Interpretation $\mathcal{I}_\Phi = (\mathcal{T}_\Phi, \beta_\Phi)$, wobei $\mathcal{T}_\Phi = (T_\Phi, \mathsf{a})$, definieren, so daß $\mathcal{I}_\Phi \models \Phi$.

  Definiere eine Relation $\sim$ auf $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ (Menge aller $\mathcal{S}$-Terme) wie folgt:

$$t_0 \sim t_1 \text{ g.d.w. } t_0 \equiv t_1 \in \Phi$$

(15) Lemma:

1. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. $\sim$ ist mit den Symbolen aus $\mathcal{S}$ verträglich, d.h. für alle Terme $t_0, t'_0, \ldots, t_{n-1}, t'_{n-1}$ mit $t_i \sim t'_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ gelten:
   - Für jedes n-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{S}$ ist $ft_0 \ldots t_{n-1} \sim ft'_0 \ldots t'_{n-1}$
   - Für jedes n-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{S}$ ist $Rt_0 \ldots t_{n-1} \in \Phi$ genau dann, wenn $Rt'_0 \ldots t'_{n-1} \in \Phi$ ist.

Beweis:

1. – Reflexivität: Es gilt $\vdash t \equiv t$ aufgrund von $(\equiv)$, folglich $\Phi \vdash t \equiv t$ und somit $t \equiv t \in \Phi$. Also: $t \sim t$ wegen Lemma (14a).
   – Symmetrie: Es gelte $s \sim t$, also $s \equiv t \in \Phi$. Betrachte die Ableitung[8]

1.	$s \equiv s$	$(\equiv)$
2.	$s \equiv t\; t \equiv s$	(Sub)auf 1.

   Damit ist $\Phi \vdash t \equiv s$, damit ist nach Lemma (14a) $t \equiv s \in \Phi$.
   – Transitivität: Es gelte $t_0 \sim t_1$ und $t_1 \sim t_2$. Betrachte die Ableitung[9]

1.	$t_0 \equiv t_1\; t_0 \equiv t_1$	(Vor)
2.	$t_0 \equiv t_1\; t_1 \equiv t_2\; t_0 \equiv t_2$	(Sub)

   Damit ist $\Phi \vdash t_0 \equiv t_2$, damit nach Lemma (14a) auch $t_0 \sim t_2$.

[8] bei der ersten Anwendung von (Sub) ist $\Gamma = \emptyset$ und $(s \equiv s) = ((x \equiv s)\frac{s}{x})$
[9] bei der ersten Anwendung von (Sub) ist $\Gamma = \{t_0 \equiv t_1\}$ und $(t_0 \equiv t_1) = ((t_0 \equiv x)\frac{t_1}{x})$

2. – Sei $f \in S$ ein n-stelliges Funktionszeichen, $t_0 \sim t'_0, \dots, t_{n-1} \sim t'_{n-1}$, also $t_i \equiv t'_i \in \Phi$. Betrachte die Ableitung[10]

$$
\begin{array}{rll}
1. & ft_0 \dots t_{n-1} \equiv ft_0 \dots t_{n-1} & (\equiv) \\
2. & t_0 \equiv t'_0 \; ft_0 \dots t_{n-1} \equiv ft'_0 t_1 \dots t_{n-1} & \textsf{(Sub)} \text{ auf } 1. \\
3. & t_0 \equiv t'_0 \; t_1 \equiv t'_1 \; ft_0 t_1 \dots t_{n-1} \equiv ft'_0 t'_1 t_2 \dots t_{n-1} & \textsf{(Sub)} \text{ auf } 2. \\
n+1. & t_0 \equiv t'_0 \; \dots \; t_{n-1} \equiv t'_{n-1} \; ft_0 \dots t_{n-1} \equiv ft'_0 \dots t'_{n-1} & \textsf{(Sub)} \text{ auf } n.
\end{array}
$$

Wir schließen $\Phi \vdash ft_0 \dots t_{n-1} \equiv ft'_0 \dots t'_{n-1}$, somit $ft_0 \dots t_{n-1} \sim ft'_0 \dots t'_{n-1}$

– Für Relationssymbole als Übung.

- **Definition** von $\mathcal{I}_\Phi$: Für $t \in \mathcal{T}^\mathcal{S}$ sei $\bar{t}$ die Äquivalenzklasse von t bezüglich $\sim$, also $\bar{t} = \left\{ t \in \mathcal{T}^\mathcal{S} \;\middle|\; t \sim t' \right\}$. Setze $\mathcal{T}_\Phi := \left\{ \bar{t} \mid t \in \mathcal{T}^\mathcal{S} \right\}$. Definiere nun a:
  - Für ein n-stelliges Relationszeichen $R \in \mathcal{S}$ und $\bar{t}_0, \dots \bar{t}_{n-1} \in T_\Phi$ setzen wir $R^{\mathcal{T}_\Phi} \bar{t}_0 \dots \bar{t}_{n-1}$ genau dann, wenn $Rt_0 \dots t_{n-1} \in \Phi$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $t_i \in \bar{t}_i$ aufgrund von Lemma (15).
  - Für ein n-stelliges Funktionssymbol $f \in \mathcal{S}$ und $\bar{t}_0, \dots \bar{t}_{n-1} \in T_\Phi$ setzen wir $f^{\mathcal{T}_\Phi}(\bar{t}_0 \dots \bar{t}_{n-1}) = \overline{ft_0 \dots t_{n-1}} \in T_\Phi$. Diese Definition ist ebenfalls aufgrund von Lemma (15) unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.
  - Für eine Konstante $c \in \mathcal{S}$ setzen wir $c^{\mathcal{T}_\Phi} = \bar{c}$.

Definiere noch die Belegung β_Φ durch $\beta_\Phi(v_n) = \bar{v}_n$. Damit ist die Interpretation $\mathcal{I}_\Phi$ definiert, dann heißt $\mathcal{I}_\Phi$ die zu Φ gehörende *Termin-terpretation*.

2.5.3 weitere Sätze und Lemmata

(16) Lemma:

1. Für alle Terme $t \in \mathcal{T}^\mathcal{S}$ gilt $\mathcal{I}_\Phi(t) = \bar{t}$.
2. Für alle atomaren Formeln φ gilt $\mathcal{I}_\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\varphi \in \Phi$.

Beweis:

1. Induktion über die Komplexität von t:

[10] bei der ersten Anwendung von (Sub) ist $\Gamma = \emptyset$ und $(ft_0 \dots t_{n-1} \equiv ft_0 \dots t_{n-1}) = ((ft_0 \dots t_{n-1} \equiv fxt_1 \dots t_{n-1})\frac{t_0}{x})$, bei der zweiten Anwendung ist $\Gamma = \{t_0 \equiv t'_0\}$ und $(ft_0 \dots t_{n-1} \equiv ft'_0 \dots t_{n-1}) = ((ft_0 \dots t_{n-1} \equiv ft_0 x \dots t_{n-1})\frac{t_1}{x})$

– Falls $t = x$ (x eine Variable): $\mathcal{I}_\Phi(t) = \beta_\Phi(x) \overset{Def.}{=} \bar{x}$
– Falls $t = c$ (c eine Konstante): $\mathcal{I}_\Phi(t) = c^{\mathcal{I}_\Phi} = \bar{c}$
– Falls $t = ft_0 \dots t_{n-1}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Phi(ft_0 \dots, t_{n-1}) &= f^{\mathcal{I}_\Phi}(\mathcal{I}_\Phi(t_0), \dots, \mathcal{I}_\Phi(t_{n-1})) \\ &\overset{IV}{=} f^{\mathcal{I}_\Phi}(\bar{t}_0, \dots, \bar{t}_{n-1}) \\ &= \overline{ft_0, \dots, t_{n-1}}\end{aligned}$$

2. Zwei Fälle:

– $\varphi = t_0 \equiv t_1$.

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{I}_\Phi \models t_0 \equiv t_1 \\ \text{g.d.w.} & \mathcal{I}_\Phi(t_0) = \mathcal{I}_\Phi(t_1) \\ \text{g.d.w.} & \bar{t}_0 = \bar{t}_1 \\ \text{g.d.w.} & t_0 \sim t_1 \\ \text{g.d.w.} & t_0 \equiv t_1 \in \Phi \end{array}$$

– $\varphi = Rt_0 \dots t_{n-1}$.

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{I}_\Phi \models Rt_0 \dots t_{n-1} \\ \text{g.d.w.} & \mathcal{I}_\Phi(t_0) \dots \mathcal{I}_\Phi(t_{n-1}) \in R^{\mathcal{I}_\Phi} \\ \text{g.d.w.} & \bar{t}_0 \dots \bar{t}_{n-1} \in R^{\mathcal{I}_\Phi} \\ \text{g.d.w.} & Rt_0 \dots t_{n-1} \in \Phi \end{array}$$

(17) Satz: Satz von Henkin: Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^\mathcal{S}$ maximal konsistent und Φ enthalte Zeugen. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{L}^\mathcal{S}$:

(+) $\mathcal{I}_\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\varphi \in \Phi$.

Beweis: Induktion über den Rang von φ. Für φ mit Rang$(\varphi) = 0$ wurde (+) in Lemma (16b) bewiesen. Sei nun Rang$(\varphi) = n + 1$ und (+) bewiesen für alle $\varphi \in \mathcal{L}^\mathcal{S}$ mit Rang höchstens n.

– φ sei $\neg\psi$. Dann ist Rang$(\psi) = n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt (+) für ψ. Nun gilt:

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{I}_\Phi \models \varphi \\ \text{g.d.w.} & \text{nicht } \mathcal{I}_\Phi \models \psi \\ \text{(IV) g.d.w.} & \text{nicht } \psi \in \Phi \\ \text{(14 b) g.d.w.} & \neg\psi \in \Phi \end{array}$$

– φ sei $(\psi \vee \chi)$. Somit $\mathrm{Rang}(\psi), \mathrm{Rang}(\chi) \leq n$.

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{I}_\Phi \models \varphi \\ \text{g.d.w.} & \mathcal{I}_\Phi \models \psi \text{ oder } \mathcal{I}_\Phi \models \chi \\ \text{(IV) g.d.w.} & \psi \in \Phi \text{ oder } \chi \in \Phi \\ \text{(14 c) g.d.w.} & (\psi \vee \chi) \in \Phi \end{array}$$

– φ sei $\exists x \psi$. Somit $\mathrm{Rang}(\psi) = n$ und auch $\mathrm{Rang}\left(\psi \frac{t}{x}\right) = n$ für alle x, t.

$$\begin{array}{rl} & \mathcal{I}_\Phi \models \exists x \psi \\ \text{g.d.w.} & \text{es ex. } t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}, \text{ so dass } \mathcal{I}_\Phi \dfrac{\bar{t}}{x} \models \psi \\ \text{(16 a) g.d.w.} & \text{es ex. } t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}, \text{ so dass } \mathcal{I}_\Phi \dfrac{\mathcal{I}_\Phi(t)}{x} \models \psi \\ \text{(Subst.) g.d.w} & \text{es ex. } t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}, \text{ so dass } \mathcal{I}_\Phi \models \psi \dfrac{t}{x} \\ \text{(IV) g.d.w.} & \text{es ex. } t \in \mathcal{T}^{\mathcal{S}}, \text{ so dass } \psi \dfrac{t}{x} \in \Phi \\ \text{(14 e) g.d.w.} & \varphi = \exists x \psi \in \Phi \end{array}$$

(18) Korollar: Sei Φ maximal konsistent, so dass Φ Zeugen enthält. Dann ist Φ erfüllbar und zwar $\mathcal{I}_\Phi \models \Phi$.

- Nun wollen wir zeigen, dass beliebige konsistente Formelmengen $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ erfüllbar sind (und damit den Gödel'schen Vollständigkeitssatz beweisen). In dieser Vorlesung tun wir das nur für abzählbare Symbolmengen S.

- **Definition:** Eine Menge A heißt *endlich*, falls $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $\pi : A \to \{0, \ldots, n-1\}$ existiert. Eine Menge A heißt *abzählbar unendlich*, falls eine Bijektion $\pi : A \to \mathbb{N}$ existiert. Eine Menge heißt *abzählbar*, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

(19) Lemma: Falls A abzählbar ist, so ist auch $A^{<\mathbb{N}}$ abzählbar.

Beweis: Sei p_n die n-te Primzahl. O.B.d.A. $A \neq \emptyset$. Falls A endlich ist, sei $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_0, \ldots, a_n$. Falls A unendlich ist, sei $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit paarweise verschiedenen a_n. Definiere folgende Abbildung:

$$\beta : A^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \text{ mit } a_{i_0} \ldots a_{i_{r-1}} \mapsto p_0^{i_0+1} \cdot \ldots \cdot p_{r-1}^{i_{r-1}+1}$$

Die leere Folge wird also aufs leere Produkt abgebildet, das definitionsgemäs 1 ist. Mithilfe des Satzes über die eindeutige Primfaktorzerlegung aus der Algebra erhalten wir wie folgt die Injektivität von β. Seien $s_1 = a_{i_0} \dots a_{i_{r-1}},\ s_2 = a_{j_0} \dots a_{j_{s-1}}$ verschiedene Folgen in $A^{<\mathbb{N}}$.

– Fall $r \neq s$, z.B. $r < s$. Dann ist $p_r^{j_r+1}$ ein Faktor in $\beta(s_2)$, somit teilt p_r die Zahl $\beta(s_2)$, aber p_r teilt nicht $\beta(s_1)$. Es folgt: $\beta(s_1) \neq \beta(s_2)$.
– Fall $r = s$. Dann existiert $0 \leq l < r$ minimal mit $a_{i_l} \neq a_{j_l}$, z.B. $i_l < j_l$. Dann teilt $p_l^{j_l+1}$ die Zahl $\beta(s_2)$, aber nicht $\beta(s_1)$. Wieder folgt $\beta(s_1) \neq \beta(s_2)$.

Wir haben also, dass β injektiv ist. Klarerweise ist $A^{<\mathbb{N}}$ unendlich. Somit ist $\beta\left[A^{<\mathbb{N}}\right] \left(:= \left\{\beta(s) \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\right\}\right)$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Aber jede unendliche Teilmenge $B \subseteq \mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich: wir definieren induktiv eine Aufzählung von B. Sei $b_0 = \min(B)$. Falls $b_0, \dots, b_n \in B$ definiert sind, setze $b_{n+1} = \min(B \setminus \{b_0, \dots, b_n\})$. Offensichtlich ist $B = \{b_n \mid n \in N\}$ und die Abbildung $\gamma : B \to \mathbb{N}$ mit $b_n \mapsto n$ ist bijektiv und wohldefiniert. Sei jetzt $\gamma : \beta\left[A^{<\mathbb{N}}\right] \to \mathbb{N}$ bijektiv. Es folgt, dass $\gamma \circ \beta : A^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist.

- Sei nun S eine abzählbare Symbolmenge. Dann ist $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ (das Alphabet der Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$) immer noch abzählbar. Aus Lemma (19) folgt, dass $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{<\mathbb{N}}$ abzählbar ist, folglich auch $\mathcal{L}^{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{<\mathbb{N}}$ und $\mathcal{T}^{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{<\mathbb{N}}$.

- Wir betrachten zuerst den Fall, dass eine konsistente Menge $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gegeben ist, die die zusätzliche Eigenschaft besitzt, dass in ihren Formeln nur endlich viele Variablen frei sind; d.h. wir nehmen an, die folgende Menge sei endlich:
$$\mathrm{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathrm{frei}(\varphi)$$

(20) Lemma: Sei $\mathcal{S}$ abzählbar, sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ konsistent und frei(Φ) sei endlich. Dann existiert eine konsistente Menge $\Psi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ mit $\Phi \subseteq \Psi$ so dass Ψ Zeugen enthält.

Beweis: Nach Lemma (19) ist $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^{<\mathbb{N}}$ und somit $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ abzählbar unendlich. Folglich gibt es abzählbar unendlich viele Formeln, die mit einem Existenzquantor beginnen. Wir können alle diese also aufzählen:

$$\exists x_0 \varphi_0, \exists x_1 \varphi_1, \dots, \exists x_n \varphi_n, \dots$$

Rekursiv definieren wir nun Formeln ψ_n für alle $n \in \mathbb{N}$. ψ_n soll einen Zeugen liefern für $\exists x_n \varphi_n$ (d.h. ψ_n hat die Gestalt $\exists x_n \varphi_n \to \varphi_n \frac{t_n}{x_n}$ für einen Term t_n).

Angenommen ψ_m seien für alle $m < n$ schon konstruiert. Da frei(Φ) endlich ist, kommen auch in den Formeln der Menge

$$\Phi \cup \{ \psi_m \mid m < n\} \cup \{\exists x_n \varphi_n\} \tag{$\star$}$$

nur endlich viele Variablen frei vor. Sei also y_n die erste Variable under den $v_0, \ldots, v_k, \ldots$, welche in keiner Formel der Menge ($\star$) frei vorkommt. Setze $\psi_n := (\exists x_n \varphi_n \rightarrow \varphi_n \frac{y_n}{x_n})$. Sei $\Psi' := \Phi \cup \{ \psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Klarerweise $\Phi \subseteq \Psi'$ und Ψ' enthält Zeugen.

Es bleibt die Konsistenz von Ψ zu zeigen. Setze $\Phi_n := \Phi \cup \{ \psi_m \mid m < n\}$. Also gilt $\Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \ldots$ und $\Psi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n$. Dazu müssen wir Con$\Phi_n$ zeigen für alle n. Mit Induktion über n:

- Induktionsverankerung: $n = 0$: $\Phi_n = \Phi$, nach Voraussetzung gilt ConΦ.
- Induktionsschritt: Angenommen, Φ_{n+1} wäre inkonsistent. Wir haben dann $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup \{\psi_n\}$. Dabei ist $\psi_n = (\neg \exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{t_n}{x_n})$.

  Sei nun $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ ein beliebiger Satz mit $\Phi_n \vdash \neg\varphi$. Da Φ_{n+1} inkonsistent, existiert (mit (Wid')) eine Sequenz Γ in Φ_n mit $\vdash \Gamma \psi_n \varphi$. Wir erhalten jetzt folgende Ableitung:

1.	$\Gamma \psi_n \varphi$	Prämisse
2.	$\Gamma \neg\exists x_n \varphi_n \, \neg\exists x_n \varphi_n$	(Vor)
3.	$\Gamma \neg\exists x_n \varphi_n \, (\neg\exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{t_n}{x_n})$	($\vee$S) auf 2.
4.	$\Gamma \neg\exists x_n \varphi_n (\neg\exists x_n \varphi_n \vee \varphi_n \frac{t_n}{x_n}) \, \varphi$	(Ant) auf 1.
5.	$\Gamma \neg\exists x_n \varphi_n \, \varphi$	(KS) auf 3., 4.
6.	$\Gamma \varphi_n \frac{t_n}{x_n} \, \varphi$	analog zu 1. bis 5.
7.	$\Gamma \exists x_n \varphi_n \, \varphi$	($\exists$A) auf 6.
8.	$\Gamma \, \varphi$	(FU) auf 5., 7.

  Wobei Nummer 7 korrekt ist, da t_n nicht frei auftritt in $\Gamma \exists x_n \varphi_n \varphi$.

  Folglich gilt $\Phi_n \vdash \varphi$. Es gilt jedoch auch $\Phi_n \vdash \neg\varphi$, also ist Φ_n inkonsistent, Widerspruch!

  Also gilt ConΦ_{n+1}. Die Voraussetzungen für Lemma (13) sind somit erfüllt und wir erhalten ConΨ

(21) Lemma: Sei $\mathcal{S}$ abzählbar und sei $\Psi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ konsistent. Dann existiert ein maximal konsistentes $\Theta \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ mit $\Psi \subseteq \Theta$.

Beweis: Wie gesehen ist $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ abzählbar. Sei also $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mit

$n \in \mathbb{N}$ eine Aufzählung aller Formeln in $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Wir konstruieren rekursiv die Formelmengen Θ_n für alle $n \in \mathbb{N}$: Sei $\Theta_0 := \Psi$ und

$$\Theta_{n+1} := \begin{cases} \Theta_n \cup \{\varphi_n\} & \text{falls} \quad \mathrm{Con}(\Theta_n \cup \{\varphi_n\}) \\ \Theta_n & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei nun $\Theta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Theta_n$. Klarerweise ist $\Psi \subseteq \Theta$ und jedes Θ_n $(n \in \mathbb{N})$ konsistent. Nach Lemma (13) ($S_n = S$ für alle n) folgt $\mathrm{Con}\Theta$ und Θ ist maximal konsistent[11]

(22) Korollar: Sei $\mathcal{S}$ abzählbar. Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ konsistent und frei(Φ) endlich. Dann ist Φ erfüllbar.

Beweis: Wähle zuerst Ψ zu Φ gemäß Lemma (20), also $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und Ψ konsistent mit Zeugen. Wende Lemma (21) an auf Ψ und erhalte Θ maximal konsistent mit $\Psi \subseteq \Theta \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Klarerweise enthält Θ Zeugen. Nach dem Satz von Henkin ist Θ erfüllbar, somit auch $\Phi \subseteq \Theta$.

Es bleibt, die Voraussetzung „frei(Φ) endlich" wegzuschaffen:

(23) Satz: Sei $\mathcal{S}$ abzählbar und sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ konsistent. Dann ist Φ erfüllbar.

Beweis: Wir erweitern die Symbolmenge $\mathcal{S}$ nun um abzählbar viele *neue* Konstanten. Seien $c_0, \ldots, c_n, \ldots$ (mit $n \in \mathbb{N}$) paarweise verschiedene Konstantensymbole, die noch nicht in $\mathcal{S}$ vorkommen. Sei dann $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ sei $n(\varphi)$ die kleinste natürliche Zahl n mit frei$(\varphi) \in \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Setze

$$\varphi' := \varphi\frac{c_0 \ldots c_{n(\varphi)-1}}{v_0 \ldots v_{n(\varphi)-1}}$$

Also ist $\varphi' \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}'}$ (φ' ist ein Satz in $\mathcal{L}^{\mathcal{S}'}$). Sei weiter $\Phi' := \{\varphi' \mid \varphi \in \Phi\}$. Somit ist $\Phi' \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}'}$ (Menge von $\mathcal{S}$-Sätzen) und frei$(\Phi') = \emptyset$.

Wir wollen Korollar (22) auf Φ' anwenden. Dazu müssen wir $\mathrm{Con}\Phi'$ zeigen. Wegen Lemmas (10) und (11) genügt es zu zeigen, daß jede endliche Teilmenge von Φ' erfüllbar ist. Sei also $\Phi'_0 = \{\varphi'_0, \ldots, \varphi'_{n-1}\} \subseteq \Phi'$ mit $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Phi$ beliebig vorgegeben. Wegen $\mathrm{Con}_{\mathcal{S}}\Phi$ folgt $\mathrm{Con}_{\mathcal{S}}\Phi_0$, wobei $\Phi_0 = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$. Da Φ_0 selbst endlich ist, ist natürlich auch frei(Φ_0) endlich. Wegen Korollar (22) ist Φ_0 erfüllbar.

Wähle also eine $\mathcal{S}$-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ mit $\mathcal{I} \models \Phi_0$. Sei $\mathfrak{A} = (A, \mathsf{a})$. Wir expandieren zu einer $\mathcal{S}'$-Struktur $\mathfrak{A}' = (A, \mathsf{a}')$, indem wir setzen: $\mathsf{a}' \upharpoonright \mathcal{S} = \mathsf{a}$ und $\mathsf{a}'(c_i) = \mathcal{I}(v_i) = \beta(v_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei nun $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}', \beta)$.

[11] Sei $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ beliebig. Finde n, so daß $\varphi_n = \varphi$. Falls nun $\Theta \cup \{\varphi\}$ konsistent ist, so natürlich auch $\Theta_n \cup \{\varphi_n\}$. Es folgt $\Theta_{n+1} = \Theta_n \cup \{\varphi\}$. Somit ist $\varphi \in \Theta_{n+1} \subseteq \Theta$.

Behauptung: Dann gilt $\mathcal{I}' \models \Phi_0'$, also $\mathcal{I}' \models \varphi_i'$ für alle $i < n$.

Beweis: Sei $j = n(\varphi_i) - 1$

$$\begin{array}{rll} & & \mathcal{I}' \models \varphi_i' \\ & \text{g.d.w.} & \mathcal{I}' \models \varphi_i \frac{c_0 \ldots c_j}{v_0 \ldots v_j} \\ \text{SubstLm.} & \text{g.d.w.} & \mathcal{I}' \frac{\mathcal{I}'(c_0) \ldots \mathcal{I}'(c_j)}{v_0 \ldots v_j} \models \varphi_i \\ \text{Def. } \mathcal{I}' & \text{g.d.w.} & \mathcal{I}' \frac{\mathcal{I}(v_0) \ldots \mathcal{I}(v_j)}{v_0 \ldots v_j} \models \varphi_i \\ & \text{g.d.w.} & \mathcal{I}' \frac{\beta(v_0) \ldots \beta(v_j)}{v_0 \ldots v_j} \models \varphi_i \\ \text{Def. } \mathcal{I}' & \text{g.d.w.} & \mathcal{I}' \models \varphi_i \\ \text{KoinzLm.} & \text{g.d.w.} & \mathcal{I} \models \varphi_i \end{array}$$

Da $\mathcal{I} \models \Phi_0$, folgt die Behauptung.

Folglich gilt $\mathrm{Con}\Phi'$. Da $\mathrm{frei}(\Phi') = \emptyset$, folgt mit Korollar (22) die Erfüllbarkeit von Φ'. Sei also $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}', \beta')$ eine $\mathcal{I}'$-Interpretation mit $\mathcal{I}' \models \Phi'$. Nach Koinzidenzlemma gilt dies unabhängig von β' (also $\mathfrak{A}' \models \Phi'$). Wir können o.B.d.A. annehmen, es gelte $\beta'(v_i) = \mathcal{I}'(c_i) = c_i^{\mathfrak{A}'}$, also $\mathcal{I}'(v_i) = \mathcal{I}'(c_i)$ für alle i.

Genau wie im Beweis der Behauptung erhalten wir $\mathcal{I}' \models \varphi'$ genau dann, wenn $\mathcal{I}' \models \varphi$ (für alle $\varphi \in \Phi$), also folgt $\mathcal{I}' \models \Phi$, somit ist Φ erfüllbar.

2.5.4 Gödels Vollständigkeitssatz

(24) Satz: Gödels Vollständigkeitssatz: Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Symbolmenge. Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und jede Formel $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ gilt: Falls $\Phi \models \varphi$, dann $\Phi_{\mathcal{S}} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$.

Beweis: Nur im Fall, daß $\mathcal{S}$ abzählbar ist. Die Behauptung folgt aus Satz 23 und dem Beweis von $(\star\star) \Rightarrow (\star)$ am Anfang dieses Kapitels.

Bemerkungen:

1. Der Beweis im Fall „$\mathcal{S}$ überabzählbar“ verläuft analog zum abzählbaren Fall. Das neue Element ist hier die Verwendung des Lemmas von Zorn (einer äquivalenten Version des Auswahlaxioms) bei der Erweiterung einer konsistenten Formelmenge zu einer maximal konsistenten.
2. Aus Satz (24) und dem Satz über die Korrektheit des Sequenzenkalküls folgt $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \vdash \varphi$ ist (Φ, φ wie gehabt), bzw. aus Satz (23) und Lemma (11) („erfüllbare Formelmengen sind konsistent“) folgt: $\mathrm{Erf}\Phi$ genau dann, wenn $\mathrm{Con}_{\mathcal{S}}\Phi$ für beliebige $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$.

3. Seien $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ Symbolmengen mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$; seien $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Eine Anwendung des Koinzidenzlemmas war, daß $\Phi \models_{\mathcal{S}} \varphi$ äquivalent ist zu $\Phi \models_{\mathcal{S}'} \varphi$. Damit folgt mit der Äquivalenz $(+)$: $\Phi \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ genau dann, wenn $\Phi \vdash_{\mathcal{S}'} \varphi$. Folglich können wir auch bei $\vdash_{\mathcal{S}}$ das $\mathcal{S}$ weglassen.

(25) Satz: Kompaktheitssatz: Sei $\mathcal{S}$ eine Symbolmenge. Dann gelten für beliebige $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ und $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$:

1. $\Phi \models \varphi$ genau dann, wenn ein *endliches* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert mit $\Phi_0 \models \varphi$.
2. $\mathrm{Erf}\Phi$ genau dann, wenn für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gilt: $\mathrm{Erf}\Phi_0$.

Beweis: Falls in den Aussagen $\models$ ersetzt wird durch $\vdash$ bzw. Erf durch Con, so erhalten wir trivialerweise wahre Aussagen. Aber diese Ersetzungen führen zu äquivalenten Aussagen.

(26) Satz: Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem - spezielle Version: Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Symbolmenge und sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ abzählbar und erfüllbar. Dann ist Φ erfüllbar über einem abzählbaren Träger, d.h. es gibt eine Interpretation mit abzählbarem Träger, die Modell für Φ ist.

zum **Beweis:** Sei $\mathcal{S}_0$ die Menge der Symbole, die in Φ vorkommen. Aus der Abzählbarkeit von Φ folgt die Abzählbarkeit von $\mathcal{S}_0$. Klarerweise ist $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}_0}$. Analysiere nun die Konstruktion eines Modells für Φ im Beweis des Vollständigkeitssatzes.

(27) Satz: Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem - spezielle Version: Sei Φ eine Formelmenge, die erfüllbar ist über einem unendlichen Träger. Dann ist Φ erfüllbar über Träger beliebig großer unendlicher Mächtigkeit.

Beweis: Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine $\mathcal{S}$-Interpretation mit unendlichem Träger A, so daß $\mathcal{I} \models \Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$. Sei nun X eine beliebige Menge. Seien nun c_x für $x \in X$ neue, paarweise verschiedene Konstantensymbole (die c_x treten in der Symbolmenge von Φ nicht auf). Setze nun $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cup \{ c_x \mid x \in X \}$. Betrachte nun die folgende Formelmenge in $\mathcal{L}^{\mathcal{S}'}$:

$$\Psi := \Phi \cup \{ \neg c_x \equiv c_y \mid x, y \in X \text{ mit } x \neq y \}$$

Wir wollen zeigen, daß Ψ erfüllbar ist, dazu genügt nach Kompaktheitssatz die Erfüllbarkeit jedes endlichen $\Phi_0 \subseteq \Psi$ zu zeigen: Sei also

$\Phi_0 \subseteq \Psi$ endlich. Wir können schreiben $\Phi_0 = \Phi_0^0 \cup \Phi_0^1$ mit $\Phi_0^0 \subseteq \Phi$ und $\Phi_0^1 = \{ \neg c_{x_i} \equiv c_{y_i} \mid i < n \}$.

Da A unendlich ist, können wir darin n paarweise verschiedene Elemente $a_0, \ldots, a_{2n-1}$ auswählen. Sei nun $\mathcal{I}' = (\mathfrak{A}', \beta)$ die $(\mathcal{S} \cup \{ c_{x_i}, c_{y_i} \mid i < n \})$-Interpretation, so daß $\mathfrak{A}'$ eine Expansion von $\mathfrak{A}$ ist und $c_{x_0}^{\mathfrak{A}'} = a_0$, $c_{y_0} = a_1$ sowie $c_{x_i}^{\mathfrak{A}'} = a_{2i}$ (falls $x_i \notin \{ x_j, y_j \mid j < i \}$) und analog für $c_{y_i}^{\mathfrak{A}'} = a_{2i+1}$ (falls $y_i \notin \{ x_j, y_j \mid j < i \}$).

Nach Koinzidenzlemma gilt nachwievor $\mathcal{I}' \models \Phi$, also auch $\mathcal{I}' \models \Phi_0^0$. Nach Wahl der $c_i^{\mathfrak{A}'}$ gilt außerdem $\mathcal{I}' \models \Phi_0^1$. Somit $\mathcal{I}' \models \Phi_0$. Es folgt Erf$\psi$. Sei nun $\mathcal{K} = (\mathfrak{B}, \gamma)$ eine Interpretation mit $\mathcal{K} \models \Psi$. Klarerweise ist die Abbildung $X \to B$ mit $x \mapsto c_x^{\mathfrak{B}}$ injektiv.

Bemerkung: Es folgt z.B., daß keine Formel $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ existiert, so daß alle Modelle abzählbar unendlich sind.

- Wir kennen die Symbolmenge $\mathcal{S}_{\text{Ar}}^{<} = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$. Das Standardmodell dieser Signatur ist: $\mathcal{N}^{<} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}})$.

  Definition: Gegeben sei eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A}$, so sei $\text{Th}(\mathfrak{A}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}} \;\middle|\; \mathfrak{A} \models \varphi \right\}$.

  Definition: Ein *Nicht-Standardmodell* von $\text{Th}(\mathcal{N}^{<})$ ist eine $\mathcal{S}_{\text{Ar}}^{<}$-Struktur $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\mathcal{N}^{<})$ und $\mathfrak{A}$ nicht zu $\mathcal{N}^{<}$ isomorph ist.

  Aufgrund des aufsteigenden Satzes von Löwenheim und Skolem wissen wir, daß Nicht-Standardmodelle von $\text{Th}(\mathcal{N}^{<})$ existieren, nämlich überabzählbare. Der Satz von Skolem besagt, daß es auch abzählbare solche gibt.

  Beweis Setze $\underline{n} := 1 + \ldots + 1$ (n mal, also ein Term in $\mathcal{T}^{\mathcal{S}_{\text{Ar}}^{<}}$). Sei $\Psi = \text{Th}(\mathcal{N}^{<}) \cup \{ \neg v_0 \equiv \underline{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$. Dann ist Ψ abzählbar.

  Zeige leicht, daß jede endliche Teilmenge von Ψ erfüllt ist in $\mathcal{N}^{<}$ Folglich ist Ψ erfüllbar. Da Ψ abzählbar, auch über einem abzählbaren Träger (nach absteigendem Satz von Löwenheim und Skolem). Sei also $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ Modell für Ψ mit A abzählbar.

  Angenommen, $\pi : \mathcal{N}^{<} \simeq \mathfrak{A}$. Es folgt über Induktion: $\pi(0^{\mathbb{N}}) = 0^{A}$, $\pi(1^{\mathbb{N}}) = 1^{A}$ und entsprechend $\pi(\underline{n+1}^{\mathbb{N}}) = \underline{n+1}^{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  Folglich ist das Bild von π die Menge aller $\left\{ \underline{n}^{A} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq A$. Betrachte $\beta(v_0) \in A$. Es gilt: $\beta(v_0) \neq \underline{n}^{A}$ für alle n, somit ist π nicht surjektiv, Widerspruch!

  Wie sieht $\mathfrak{A}$ aus? Es gilt:

  1. $\mathcal{N}^{<} \models <$ ist lineare Ordnung

2. $\mathcal{N}^< \models 0$ ist das kleinste Element

3. $\mathcal{N}^< \models \forall x(x \equiv 0 \vee x \equiv 1 \vee 2 \leq x)$

4. $\mathcal{N}^< \models \forall x(\neq x \equiv 0 \rightarrow \ \exists\, y(y+1 \equiv x))$

5. $\mathcal{N}^< \models \forall x(x < x+1)$

6. $\mathcal{N}^< \models \forall x \exists y(2y+1 \equiv x \vee 2y \equiv x)$

All diese Sätze gelten auch in $\mathfrak{A}$, es folgt für $a := \beta(v_0)$. Es folgt $\underline{n}^A < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Durch 4. und 5. existieren auch Vorgänger und Nachfolger von a, also eine Kopie von $\mathbb{Z}$. Es existiert nach 6. auch $b \in A$ mit $2^A \cdot b^A = a$ (oder $2b+1 = a$). Es gilt $\underline{n}^A < b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b < a - \underline{n}^A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also liegt zwischen $\mathbb{N}$ und der a-Kopie von $\mathbb{Z}$ wieder eine b-Kopie von $\mathbb{Z}$: Analog weiter…

2.6 Nachtrag

- Auf Nachfrage eines Studenten: Ableitung der folgenden Regel (falls y nicht frei ist in $\Gamma\forall x\varphi$):

$$\frac{\Gamma\varphi\frac{y}{x}}{\Gamma\forall x\varphi}$$

1.	$\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}$	Prämisse
2.	$\Gamma\ z \equiv z$	$(\equiv)$
3.	$\Gamma\neg\varphi\frac{y}{x}\ \varphi\frac{y}{x}$	(Ant)
4.	$\Gamma\neg\varphi\frac{y}{x}\ \neg\varphi\frac{y}{x}$	(Vor)
5.	$\Gamma\neg\varphi\frac{y}{x}\ \neg z \equiv z$	(Wid') auf 3., 4. $(x \neq z \neq y)$
6.	$\Gamma\exists x\neg\varphi\ \neg z \equiv z$	($\exists$A) auf 5.
7.	$\Gamma z \equiv z\ \neg\exists x\neg\varphi$	(KP) auf 6.
8.	$\Gamma\neg\exists x\neg\varphi$	(KS) auf 2., 6.

3 Rekursionstheorie

- Church, Kleene, Turing, Gödel
- Frage als Motivation: Zu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, \circ^{\mathbb{N}})$: Was ist

$$\mathrm{Th}(\mathcal{N}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \;\middle|\; \mathcal{N} \models \varphi \right\}?$$

Sei $\Phi_{\mathrm{PA}} \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ die Menge der Peano-Axiome und sei

$$\Phi_{\mathrm{PA}}^{\models} = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \;\middle|\; \Phi_{\mathrm{PA}} \vdash \varphi \right\} \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$$

Gödels Unvollständigkeitssatz impliziert: $\Phi_{\mathrm{PA}}^{\models} \subsetneqq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

3.1 Registermaschinen

3.1.1 Definitionen

- Sei $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_r\}$ ein endliches Alphabet. Das leere Wort über $\mathcal{A}$ wird nun häufig mit $\square$ bezeichnet. Eine *Registermaschine* (abgekürzt RM) besteht aus einer Reihe von Registern $R_0, \dots, R_m, \dots$. Diese Register können mit Wörtern über $\mathcal{A}$ gefüllt werden.

- Wir wollen nun erklären, was ein *Programm* P für eine Registermaschine ist. Ein solches Programm ist eine endliche Folge $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_k \rangle$ von sogenannten *Zeilen* α_i $(0 \leq i \leq k)$ mit gewissen Eigenschaften: Eine Zeile beginnt mit einer Zeilennummer (natürliche Zahl) und enthält danach eine Anweisung für die Registermaschine. Wir unterscheiden die folgenden fünf Typen von Zeilen:

  1. *Verlängerungsanweisungen* haben die Gestalt `Z LET` $R_i = R_i + a_j$ (wobei $Z, i, j \in \mathbb{N}$ und $j \leq r$).

     Diese Anweisung wird ausgeführt, indem an das Wort im Register R_i der Buchstabe a_j angehängt wird.

  2. *Verkürzungsanweisungen* haben die Gestalt `Z LET` $R_i = R_i - a_j$ (wobei $Z, i, j \in \mathbb{N}$ und $j \leq r$). Diese Anweisung wird ausgeführt, indem vom Wort im Register R_i der letzte Buchstabe weggestrichen wird, falls dieser a_j ist, und ansonsten dieses Wort unverändert gelassen wird.

  3. *Sprunganweisungen* haben die Gestalt `Z IF` $R_i = \square$ `THEN Z'` `ELSE` Z_0 `OR ...OR` Z_i `OR ...OR` Z_r (wobei $Z, Z', Z_0, \dots, Z_r, i \in \mathbb{N}$). Sie wird ausgeführt, indem zuerst das Wort im Register R_i

betrachtet wird. Falls dieses leer ist, springt die Registermaschine zur Zeile mit Nummer Z'. Andernfalls endet dieses Wort mit einem Buchstaben a_j für ein $0 \leq j \leq r$. In diesem Fall springt die RM zur Zeile mit Nummer Z_j.

4. *Druckanweisungen* haben die Gestalt `Z PRINT` (wobei $Z \in \mathbb{N}$). Diese Anweisung wird ausgeführt, indem vom Wort im Register R_0 ausgegeben wird.
5. *Stoppanweisungen* haben die Gestalt `Z STOP` (wobei $Z \in \mathbb{N}$). Diese Anweisung wird ausgeführt, indem die Maschine stoppt.

Ein Programm P für die Registermaschine ist nun wie gesagt eine endliche Folge $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_k \rangle$ von Zeilen vom Typ 1 - 5, wobei wir zusätzlich verlangen:

1. α_i hat die Zeilennummer i (für $0 \leq i \leq k$).
2. Jede Zeile mit einer Sprunganweisung verweist auf Zeilennummer $\leq k$. D.h. falls α_l vom Typ 3 ist, so sind $Z', Z_0, \ldots, Z_r \leq k$.
3. Die letzte Zeile α_k enthält eine Stoppanweisung und keine andere Zeile.

Ein Programm P wird nun folgendermaßen auf der RM ausgeführt:

– Am Anfang der Ausführung befindet sich im Register R_0 die *Eingabe* (ein beliebiges Wort über $\mathcal{A}$); alle anderen Register enthalten das leere Wort $\Box$.

– Schritt für Schritt werden nun die Zeilen von P abgearbeitet, d.h. es werden die darin genannten Anweisungen ausgeführt, beginnen mit α_0, dann α_1 etc., außer die Zeile enthalte eine Sprunganweisung. Dann wird zur entsprechenden Zeile gesprungen und die dortige Anweisung ausgeführt.

– Im Verlauf dieses Verfahrens werden möglicherweise Ausgabewörter ausgedruckt (immer wenn eine Druckanweisung ausgeführt wird).

– Möglicherweise stoppt das Verfahren (wenn nämlich irgendwann die letzte Zeile erreicht wird), möglicherweise auch nicht.

– Falls am Anfang die Eingabe im Register R_0 das Wort ζ war und das Verfahren stoppt, schreiben wir kurz $P : \zeta \to$ `STOP`; andernfalls $P : \zeta \to \infty$.

  Falls $P : \zeta \to$ `STOP` und außerdem genau ein Ausgabewort η ausgedruckt wurde, schreiben wir $P : \zeta \to \eta$.

- Abkürzung: Eine Zeile der Gestalt `Z IF` $R_i = \Box$ `THEN Z' OR ELSE Z' OR ...OR Z'` wird abgekürzt als `Z GOTO Z'`.

- Beispiele:

  1. Sei $\mathcal{A} = \{a_0, \ldots, a_r\}$ beliebig. Ein Programm P_1 mit $P_1 : \zeta \to \Box$ für alle $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$.

```
      0   IF R_0 = □ THEN 2·r+3 ELSE 1 OR 3 OR ...OR 2·r+1
      1   LET R_0 = R_0 − a_0
      2   GOTO 0
      3   LET R_0 = R_0 − a_1
      4   GOTO 0
  2·r+1   LET R_0 = R_0 − a_r
  2·r+2   GOTO 0
  2·r+3   PRINT
  2·r+4   STOP
```

  2. Sei $\mathcal{A} = \{a_0, \ldots, a_r\}$ beliebig. Ein Programm P_2 mit $P_2 : \zeta \to \infty$ für alle $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$.

```
0   GOTO 0
1   STOP
```

  3. Sei $\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$. Ein Programm P_3 mit $P_3 : \zeta \to \zeta\zeta$ für alle $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$. Sei ζ^{-1} das Wort ζ in umgekehrter Reihenfolge. Das Programm besteht aus drei Schleifen:

     (a) Abbau von ζ in R_0 und Aufbau von ζ^{-1} in R_1 und R_2

     (b) Abbau von ζ^{-1} in R_1 und Aufbau von ζ in R_0

     (c) Abbau von ζ^{-1} in R_2 und Aufbau von ζ in R_0

0 IF $R_0 = \Box$ THEN 9 ELSE 1 OR 5
1 LET $R_1 = R_1 + a_0$
2 LET $R_2 = R_2 + a_0$
3 LET $R_0 = R_0 - a_0$
4 GOTO 0
5 LET $R_1 = R_1 + a_1$
6 LET $R_2 = R_2 + a_1$
7 LET $R_0 = R_0 - a_1$
8 GOTO 0
9 IF $R_1 = \Box$ THEN 16 ELSE 10 OR 13
10 LET $R_0 = R_0 + a_0$
11 LET $R_1 = R_1 - a_0$
12 GOTO 9
13 LET $R_0 = R_0 + a_1$
14 LET $R_1 = R_1 - a_1$
15 GOTO 9
16 IF $R_2 = \Box$ THEN 23 ELSE 17 OR 20
17 LET $R_0 = R_0 + a_0$
18 LET $R_2 = R_2 - a_0$
19 GOTO 16
20 LET $R_0 = R_0 + a_1$
21 LET $R_2 = R_2 - a_1$
22 GOTO 16
23 PRINT
24 STOP

3.1.2 Entscheidbarkeit

- **Definitionen:** Sei $\mathcal{A}$ eine endliches Alphabet und sei $W \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$

  1. Ein Programm P (über $\mathcal{A}$) *entscheidet* die Menge W genau dann, wenn für alle $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ gilt:

  $$\begin{array}{ll} P : \zeta \to \Box & \text{falls } \zeta \in W \\ P : \zeta \to \eta & \text{falls } \zeta \notin W \text{ mit } \eta \neq \Box \end{array}$$

  Die Menge W heißt *entscheidbar* (oder *rekursiv* bzw. *berechenbar*), falls ein Programm existiert, das W entscheidet.

  2. Ein Programm P *zählt die Menge W auf*, falls P, angesetzt auf die Eingabe $\Box$, genau alle Wörter aus W ausgibt; dies in irgendeiner Reihenfolge, möglicherweise mit Wiederholungen.

Die Menge W heißt *rekursiv aufzählbar*, falls ein Programm existiert, welches W aufzählt.

3. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Alphabete und sei $F : \mathcal{A}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ eine Funktion. Wir sagen, daß ein Programm P über $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ die Funktion F *berechnet*, falls für jedes Wort $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ gilt: $P : \zeta \to F(\zeta)$.

   Die Funktion F heißt *berechenbar* (oder *rekursiv*), falls ein Programm über $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ existiert, welches F berechnet.

- **Vorausblick** (zur Motivation oben): $\Phi_{\mathrm{PA}}^{\models}$ ist rekursiv aufzählbar, aber $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist nicht rekursiv aufzählbar!

(1) Lemma: Seien $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ nichtleere Alphabete. Sei $W \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$. Dann existiert ein Programm über $\mathcal{A}$, das W entscheidet, genau dann, wenn ein Programm über $\mathcal{B}$ existiert, das W entscheidet.

Beweis: Nur für den Fall $|\mathcal{A}| = 2$ (für $|\mathcal{A}| = 1$ siehe Bemerkung nach dem Beweis). Sei $\mathcal{A} = \{a_0, a_1\}$. Nichttrivial ist nur „$\Leftarrow$". Sei also P ein Programm über $\mathcal{B}$, das W entscheidet. Zur Vereinfachung der Notation sei $\mathcal{B} = \{a_0, a_1, a_2\}$. Zuerst ordnen wir $s \in \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ ein Wort $s^I \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ zu, die *Intervallform* oder *Intervallschreibweise* von s, definiert durch Induktion über die Länge von s:

$$\begin{aligned}
\Box^I &= \Box \\
a_0^I &= a_0\, a_0 \\
a_1^I &= a_0\, a_1\, a_0 \\
a_2^I &= a_0\, a_1 a_1\, a_0 \\
(s a_0)^I &= s^I\, a_0 \\
(s a_1)^I &= s^I a_1\, a_0 \\
(s a_2)^I &= s^I a_1 a_1\, a_0
\end{aligned}$$

Falls $U \subseteq \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$, so sei $U^I = \left\{ s^I \;\middle|\; s \in U \right\}$. Also $U^I \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$. Wir können nun in kanonischer[12] Weise aus dem Programm P ein Programm P^I über dem Alphabet $\mathcal{A}$ erhalten, so daß P^I die Menge W^I entscheidet.

Dazu wird jede Zeile von P ersetzt durch ein zugehöriges *Macro*, d.h. eine endliche Folge von Zeilen über $\mathcal{A}$, welches in entsprechender Weise die Intervallformen bearbeitet:

– Einer Zeile in P der Form `Z LET` $R_i = R_i + a_0$ entspricht das Macro [`LET` $R_i = R_i + a_0]^I$ der Form

[12] „…in ziemlich kanonischer Weise, das heißt in auf-dem-Tisch-liegender Weise…"

$$\begin{array}{rl}
\texttt{Z} & \texttt{IF } R_i = \square \texttt{ THEN Z}+1 \texttt{ ELSE Z}+2 \texttt{ OR Z}+2 \\
\texttt{Z}+1 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_0 \\
\texttt{Z}+2 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_0
\end{array}$$

- Einer Zeile in P der Form `Z LET` $R_i = R_i + a_2$ entspricht das Macro [`LET` $R_i = R_i + a_2]^I$ der Form

$$\begin{array}{rl}
\texttt{Z} & \texttt{IF } R_i = \square \texttt{ THEN Z}+1 \texttt{ ELSE Z}+2 \texttt{ OR Z}+2 \\
\texttt{Z}+1 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_0 \\
\texttt{Z}+2 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_1 \\
\texttt{Z}+3 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_1 \\
\texttt{Z}+4 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_0
\end{array}$$

  Entsprechend hat das Macro [`LET` $R_i = R_i + a_1]^I$ vier Zeilen

- Einer Zeile in P der Form `Z LET` $R_i = R_i - a_j$ entspricht das Macro [`LET` $R_i = R_i - a_j]^I$ aus der Übung.

- Einer Zeile in P der Gestalt `IF` $R_i = \square$ `THEN` Z' `ELSE` Z_0 `OR` Z_1 `OR` Z_2 wird ersetzt durch das Macro [`IF` $R_i = \square$ `THEN` Z'^* `ELSE` Z_0^* `OR` Z_1^* `OR` $Z_2^*]^I$ der Form[13]:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{Z} & \texttt{IF } R_i = \square \texttt{ THEN } Z'^* \texttt{ ELSE Z}+1 \texttt{ OR Z}+1 \\
\texttt{Z}+1 & \texttt{LET } R_i = R_i - a_0 \\
\texttt{Z}+2 & \texttt{IF } R_i = \square \texttt{ THEN } \bigstar \texttt{ ELSE Z}+5 \texttt{ OR Z}+3 \\
\texttt{Z}+3 & \texttt{LET } R_i = R_i - a_1 \\
\texttt{Z}+4 & \texttt{IF } R_i = \square \texttt{ THEN } \bigstar \texttt{ ELSE Z}+7 \texttt{ OR Z}+10 \\
\texttt{Z}+5 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_0 \\
\texttt{Z}+6 & \texttt{GOTO } Z_0^* \\
\texttt{Z}+7 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_1 \\
\texttt{Z}+8 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_0 \\
\texttt{Z}+9 & \texttt{GOTO } Z_1^* \\
\texttt{Z}+10 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_1 \\
\texttt{Z}+11 & \texttt{LET } R_i = R_i + a_0 \\
\texttt{Z}+12 & \texttt{GOTO } Z_2^*
\end{array}$$

- Für `PRINT`- und `STOP`-Zeilen verändert das Macro nichts[14].

Wie schon gesagt ist $P = \langle a_0, \ldots, a_k \rangle$. Sei nun n_i für $0 \leq i \leq k$ die Länge (Zeilenanzahl) des der Zeile α_i entsprechenden Macros.

Beschreibung von P^I: Vorangestellt wird zunächst ein Programm

[13]Statt des $\bigstar$ stand an der Tafel jeweils ein Blümchen!

[14]„Ich habe schon drei oder vier mal versucht anzudeuten, daß das Programm nicht stimmt, das hier an der Tafel steht!"

Q mit n_Q Zeilen, welches ein Wort $s \in \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ in ein Wort $s^I \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ umwandelt. Dann folgt das der Zeile α_0 entsprechende Macro, danach das der Zeile α_1 entsprechende Macro usw. Das Programm wird neu nummeriert: Die Zeile i bekommt die Nummer $n_Q + \sum_{j=0}^{i-1} n_j$; die Zeilenverweise in den Sprunganweisungen werden entsprechend korrigiert ($Z'^* = n_Q + \sum_{j=0}^{Z'-1} n_j$ etc.).

- **Bemerkung** zum Beweis von Lemma (1) im Fall $\mathcal{A} = \{a_0\}$ und $\mathcal{B} = \{a_0, a_1\}$. Wir betrachten die *lexikographische Ordnung* $<_{lex}$ auf $\mathcal{B}$. Seien $\zeta, \xi \in \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ mit $\zeta \neq \xi$, dann gelte $\zeta <_{lex} \xi$, falls ζ kürzer als ξ ist oder falls im Fall gleicher Länge an der ersten Stelle, an der ζ und ξ verschiedene Buchstaben haben, ζ a_0 stehen hat und ξ a_1. Die lexikographische Ordnung von $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ ist also:

$$\Box, a_0, a_1, a_0a_0, a_0a_1, a_1a_0, a_1a_1, a_0a_0a_0 \ldots$$

Für jedes Wort $\zeta \in \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ setze $\#\zeta = \underbrace{a_0 \ldots a_0}_{n\text{-mal}}$ wobei ζ an der Stelle n der lexikographischen Aufzählung von $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ steht. Also z.B. $\#\Box = \Box$, $\#a_0a_1 = a_0a_0a_0a_0$ etc. In Zukunft schreiben wir oft n anstelle von $\underbrace{a_0 \ldots a_0}_{n\text{-mal}}$.

  1. Es existiert ein Programm $Q_\#$ über $\mathcal{A}$, so daß $Q_\# : \zeta \to \#\zeta$ für alle $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ (d.h. es übersetzt die Wörter aus $\mathcal{A}$ in die kodierte Darstellung, z.B. $\#a_0a_0 = 3$).
  2. Zu jedem Programm P über $\mathcal{B}$ existiert ein Programm $P_\#$ über $\mathcal{A}$, so daß für alle $\zeta, \vartheta \in \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ gilt:

  $$P : \zeta \to \vartheta \quad \text{g.d.w.} \quad P_\# : \#\zeta \to \#\vartheta$$

  Falls ein $\mathcal{B}$-Programm P die Menge $W \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ entscheidet, so entscheidet auch das $\mathcal{A}$-Programm $P_\# \circ Q_\#$ die Menge W.

3.1.3 These von Church

- Seit Anfang der 1930er Jahre hat man verschiedene Konzepte von Rekursivität betrachtet, auch unter Verwendung anderer Maschinen als Registermaschinen (z.B. Turing-Maschinen). Aber stets kamen am Ende dieselben Klassen von rekursiven Mengen bzw. Funktionen heraus. Die sogenannte **These von Church**, daß der intuitive/heuristische Begriff der Rekursivität/Berechenbarkeit in seiner Extension mit dem obigen exakten zusammenfällt. Sie läßt sich in zahllosen Beispielen verifizieren:

Ein heuristisch beschriebenes rekursives Verfahren, um Mengen bzw. Funktionen zu berechnen, läßt sich stets in ein Programm für unsere Registermaschine übersetzen. Als Beispiel:

(2) Lemma: Sei $\mathcal{A}$ ein Alphabet und $W, W' \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ entscheidbare Mengen. Dann sind auch $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} \setminus W$, $W \cup W'$ und $W \cap W'$ entscheidbar.

Beweis: Übung

(3) Lemma:

1. $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ und $\emptyset$ sind aufzählbar.
2. Für jedes $W \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ gilt: W ist entscheidbar genau dann, wenn sowohl W als auch $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} \setminus W$ rekursiv aufzählbar sind.

Beweis:

1. Finde ein Programm, welches $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ in lexikographischer Reihenfolge aufzählt (siehe Übung).

2.„$\Rightarrow$“ Lasse die rekursive Aufzählung von $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ (aus (a)) laufen. Bevor ausgedruckt wird entscheide mit dem Entscheidungs- verfahren für W, ob der Ausdruck in R_0 zu W gehört. Falls ja, drucke. Falls nein, drucke nicht.

„$\Leftarrow$“ Sei $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ die Eingabe. Lasse die Aufzählverfahren von W und $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} \setminus W$ gleichzeitig laufen. Bevor gedruckt wird, vergleiche man das auszudruckende Wort mit ζ. Falls diese verschieden sind, wird nichts gedruckt; falls gleich, schaut man, ob die Aufzählung von W oder $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} \setminus W$ ζ ausgeben möchte und ändert die Ausgabe entsprechend ab.

(4) Lemma: Sei $W \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$. Äquivalent sind:

1. W ist entscheidbar
2. W ist in lexikographischer Reihenfolge aufzählbar

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Wähle ein Programm, das $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ lexikographisch aufzählt. Vor jedem Ausdrucken prüfe mit dem Entscheidungsverfahren für W, ob der Ausdruck zu W gehört (drucke aus) oder nicht (drucke nicht aus).

„$\Leftarrow$“ Sei $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$. Lasse das lexikographische Aufzählverfahren von W laufen, bis zum ersten Mal eine Ausgabe erfolgt, die lexikographisch größer ist als ζ (W sei unendlich). Falls ζ bis dahin noch nicht ausgedruckt wurde, so gehört ζ nicht zu W.

Übung: Endliche Mengen sind entscheidbar.

- Gibt es überhaupt nicht rekursive Mengen $W \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ ($\mathcal{A} \neq \emptyset$)? Klar: $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ ist unendlich, also ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}) = \{X \mid X \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}\}$ überabzählbar. Es gibt nur abzählbar viele Programm über $\mathcal{A}$, somit nur abzählbar viele rekursive Mengen.

3.2 Das Halteproblem

3.2.1 Codierung von Programmen in Wörter

- Sei $\mathcal{A} = \{a_0, \ldots, a_r\}$ ein Alphabet. Wir wollen $\mathcal{A}$-Programme als Wörter über einem größeren Alphabet $\mathcal{B}$ codieren. Sei

$$\mathcal{B} := \mathcal{A} \cup \{A, B, \ldots, X, Y, Z\} \cup \{0, 1, \ldots, 9\} \cup \{=, +, -, \Box, |\}$$

Sei $\mathcal{B}$ linear geordnet gemäß dieser Auflistung. Dann sei $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ lexikographisch geordnet. Ein Programm über $\mathcal{A}$ ist nun in natürlicher Weise ein Wort über $\mathcal{B}$, wobei wir Leerschläge weglassen; Indizes der Register werden auf die Linie gesetzt und Zeilen werden durch | abgetrennt. Z.B. entspricht dem Programm

$$\begin{array}{ll} 0 & \texttt{LET } R_1 = R_1 - a_0 \\ 1 & \texttt{PRINT} \\ 2 & \texttt{STOP} \end{array}$$

das $\mathcal{B}$-Wort $0LETR1 = R1 - a_0|1PRINT|2STOP$. Die *Gödelnummer* ξ_P des Programms P ist nun das Wort $a_0 \ldots a_0$ (n-mal), wobei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, daß das P entsprechende $\mathcal{B}$-Wort das n-te Wort in der lexikographischen Aufzählung von $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ ist.

(5) Lemma:

1. Die Menge $\{P \mid P \text{ ist } \mathcal{A}\text{-Programm}\}$ ist eine entscheidbare Teilmenge von $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$.
2. Die folgende Funktion $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}} \to \mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ ist berechenbar:

$$\zeta \mapsto \begin{cases} \xi_\zeta & \text{falls } \zeta \text{ ist } \mathcal{A}\text{-Programm} \\ \Box & \text{sonst} \end{cases}$$

D.h. einem Programm ζ wird die entsprechende Gödelnummer ξ_ζ zugeordnet.

3. Die folgende Menge Π ist entscheidbar:

$$\Pi := \{\zeta_P \mid P \text{ ist } \mathcal{A}\text{-Programm}\}$$

Beweis:

1. leicht
2. Entscheide zuerst, ob die Eingabe ζ ein $\mathcal{A}$-Programm ist. Fall nicht, drucke $\square$. Sonst starte das lexikographische Aufzählverfahren für $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ und verwende ein unbenutztes Register als Zähler. Bevor ausgedruckt wird, vergleiche die Ausgabe mit ζ. Solange diese verschieden sind, drucke nichts aus. Bei Gleichheit drucke den Zählerstand aus.
3. Falls die Eingabe ζ nicht eine Folge von a_0 ist (d.h. keine Gödelnummer vorliegt), drucke a_0 aus (als Fehlermeldung). Andernfalls bestimme das $\mathcal{B}$-Wort ϑ, das in der lexikographischen Aufzählung von $\mathcal{B}^{<\mathbb{N}}$ an der Stelle n steht, wobei $\vartheta = a_0 \dots a_0$ (n mal). Entscheide, ob ϑ ein $\mathcal{A}$-Programm ist.

3.2.2 Unentscheidbarkeit des Halteproblem

(6) Satz: Unentscheidbarkeit des Halteproblems Sei $\mathcal{A}$ ein nichtleeres, endliches Alphabet.

1. Die folgende Menge $\Pi'_{\mathtt{STOP}}$ ist nicht entscheidbar:

$$\Pi'_{\mathtt{STOP}} := \{\zeta_P \mid P \text{ ist } \mathcal{A}\text{-Programm mit } P : \xi_P \to \mathtt{STOP}\}$$

2. Die folgende Menge $\Pi_{\mathtt{STOP}}$ ist nicht entscheidbar:

$$\Pi_{\mathtt{STOP}} := \{\zeta_P \mid P \text{ ist } \mathcal{A}\text{-Programm mit } P : \square \to \mathtt{STOP}\}$$

Beweis: Wegen Lemma (1) genügt es zu zeigen, daß $\Pi_{\mathtt{STOP}}$ und $\Pi'_{\mathtt{STOP}}$ nicht entscheidbar sind durch ein $\mathcal{A}$-Programm.

1. Angenommen, P_0 wäre ein $\mathcal{A}$-Programm, das $\Pi'_{\mathtt{STOP}}$ entscheidet. D.h. also, daß für alle $\mathcal{A}$-Programme P gilt:

$$\begin{array}{lll} P_0 : \xi_P \to \square & \text{falls} & P : \xi_P \to \mathtt{STOP} \\ P_0 : \xi_P \to \eta \neq \square & \text{falls} & P : \xi_P \to \infty \end{array}$$

Wir wollen P_0 abändern zu einem $\mathcal{A}$-Programm P_1 mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $\mathcal{A}$-Programme P gilt:

$$(\star)\quad \begin{array}{lll} P_1 : \xi_P \to \infty & \text{falls} & P : \xi_P \to \texttt{STOP} \\ P_1 : \xi_P \to \texttt{STOP} & \text{falls} & P : \xi_P \to \infty \end{array}$$

Diese Abänderung von P_0 besteht darin, daß wir die letzte Zeile von P_0 (`k STOP`) ersetzen durch:

$$\begin{array}{rl} \texttt{k} & \texttt{IF } R_0 = \square \texttt{ THEN } k \texttt{ ELSE } k+1 \texttt{ OR } \ldots \texttt{OR } k+1 \\ \texttt{k}+1 & \texttt{STOP} \end{array}$$

Außerdem wird jede Zeile der Form `Z PRINT` in P_0 ersetzt durch `Z GOTO` k.

Nun liefert $(\star)$ einen Widerspruch, wenn wir $P = P_1$ nehmen.

2. Zuerst bemerken wir, daß wir auf berechenbare Weise jedem $\mathcal{A}$-Programm P ein $\mathcal{A}$-Programm P^+ zuordnen können mit der folgenden Eigenschaft:

$$P : \xi_P \to \texttt{STOP} \quad \text{g.d.w.} \quad P^+ : \square \to \texttt{STOP} \tag{**}$$

Dann gilt natürlich $\xi_P \in \Pi'_{\texttt{STOP}}$ genau dann, wenn $\xi_{P^+} \in \Pi_{\texttt{STOP}}$ gilt. Zur Definition von P^+ sei $\xi_P = a_0 \ldots a_0$ (n mal). Dann beginnt P^+ mit den n Zeilen

$$\begin{array}{rl} \texttt{0} & \texttt{LET } R_0 \texttt{ = } R_0 + a_0 \\ \vdots & \vdots \\ \texttt{n}-1 & \texttt{LET } R_0 \texttt{ = } R_0 + a_0 \end{array}$$

gefolgt von den Zeilen von P (mit verschobenen Zeilennummern). Klarerweise gilt (**). Außerdem ist die Funktion $\xi_P \mapsto \xi_{P^+}$ berechenbar. Wir können nun, ausgehend von einem Entscheidungsverfahren für $\Pi_{\texttt{STOP}}$ ein solches für $\Pi'_{\texttt{STOP}}$ angeben, was (1) widerspricht.

Sei $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ eine beliebige Eingabe. Wir entscheiden zuerst, ob $\zeta \in \Pi$ (Lemma (5)). Falls $\zeta \notin \Pi$, so auch $\zeta \notin \Pi'_{\texttt{STOP}}$. Andernfalls gilt $\zeta = \xi_P$ für ein eindeutig bestimmtes $\mathcal{A}$-Programm P. Wir berechnen ξ_{P^+}. Mittels P_0 entscheide, ob $\xi_{P^+} \in \Pi_{\texttt{STOP}}$ oder nicht. Aufgrund von (**) entscheiden damit auch, ob $\zeta \in \Pi'_{\texttt{STOP}}$ oder nicht, ein Widerspruch zu (1).

(7) Lemma: Die Mengen $\Pi_{\texttt{STOP}}$ und $\Pi'_{\texttt{STOP}}$ sind rekursiv aufzählbar.

Beweis: Das Aufzählverfahren für $\Pi_{\texttt{STOP}}$ ist eine Abfolge von unendlich vielen Schleifen S_n (für jedes $n \in \mathbb{N}$). Die Schleife S_n erstellt der Reihe nach die Wörter $\zeta = \square, a_0, a_0a_0, a_0a_0a_0, \ldots, a_0a_0 \ldots a_0$ (bis zu n mal) und prüft jedes mal, ob $\zeta \in \Pi$ oder nicht. Falls ja, somit $\zeta = \xi_P$ für ein eindeutig bestimmtes $\mathcal{A}$-Programm P, wird P angesetzt auf die

Eingabe $\square$ und n Schritte laufengelassen. Falls es dabei stoppt, wird ζ ausgedruckt; sonst gehen wir über zum nächsten ζ bzw. zur nächsten Schleife mit S_{n+1}.

(8) Korollar: $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} \setminus \Pi_{\texttt{STOP}}$ und $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} \setminus \Pi'_{\texttt{STOP}}$ sind *nicht* rekursiv aufzählbar.

Beweis: Satz (6), Lemma (7) und (3b).

3.3 Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe

3.3.1 Satz über die Unentscheidbarkeit

- Sei $\mathcal{S}_\infty$ die allgemeinste abzählbare Signatur, d.h. $\mathcal{S}_\infty$ enthält $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ (Konstanten), für jedes $n \geq 1$ n-stellige Relationszeichen $R_0^n, R_1^n, \ldots, R_m^n, \ldots$ und für jedes $n \geq 1$ auch n-stellige Funktionszeichen $f_0^n, f_1^n, \ldots, f_m^n, \ldots$.

- **Problem**, das zum Teil auftaucht: $\mathcal{S}_{infty}$ ist unendlich, Programme funktionieren jedoch nur mit endlichen Alphabeten.

  Trick: Ersetze $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ im Alphabet durch $\{v, \underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{9}\}$ und kodiere v_{50} durch $v\,\underline{5}\,\underline{0}$. Kodiere entsprechend Konstanten, Relations- und Funktionszeichen, z.B. f_{17}^{32} als $f\,\underline{1}\,\underline{7}\,\overline{3}\,\overline{2}$. Verwende also das Alphabet

  $$\{v, R, f, c, \underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{9}, \overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{9}\}$$

(9) Lemma: Die folgende Menge M ist aufzählbar.

$$M = \left\{\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_\infty} \;\middle|\; \models \varphi\right\}$$

Beweisskizze: Aufgrund des Vollständigkeitssatzes läßt sich M schreiben als $\left\{\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_\infty} \;\middle|\; \vdash \varphi\right\}$. Ein Aufzählverfahren von M stellt nun systematisch alle möglichen Ableitungen im Sequenzenkalkül der Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_\infty}$ her. Falls die ableitbare Sequenz einelementig ist und aus einem Satz besteht, wird diese ausgedruckt. Etwas genauer: Für $n = 1, 2, \ldots$ stelle man die in der lexikographischen Reihenfolge n ersten Terme und Formeln (von $\mathcal{T}^{\mathcal{S}_\infty}$ bzw. $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_\infty}$); danach bildet man die endlich vielen Ableitungen einer Länge $\leq n$, die nur diese Terme und deren sämtliche Sequenzen Länge höchstens n haben. Die einelementigen dabei abgeleiteten Sequenzen, die aus einem Satz bestehen, werden ausgedruckt.

(10) Satz: Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe (Church): Die Menge M aller allgemeingültigen $\mathcal{S}_\infty$-Sätze ist nicht entscheidbar.

Beweis: Sei $\mathcal{A} = \{a_0\}$. Wir identifizieren $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{N}$ via $n = a_0 \dots a_0$ (n mal). Nach Satz (6) ist die Menge $\Pi_{\texttt{STOP}}$ ist nicht entscheidbar:

$$\Pi_{\texttt{STOP}} := \{\zeta_P \mid P \text{ ist } \mathcal{A}\text{-Programm mit } P : \square \to \texttt{STOP}\}$$

Wir werden im folgenden jedem $\mathcal{A}$-Programm P einen S_∞-Satz φ_P auf berechenbare Weise zuordnen (d.h. dass die Abbildung $P \mapsto \varphi_P$ berechenbar ist), so daß gilt:

$$\models \varphi_P \text{ g.d.w. } P : \square \to \texttt{STOP} \qquad (\star)$$

Wäre nun $\left\{\varphi \in \mathcal{L}_0^{S_\infty} \;\middle|\; \models \varphi\right\}$ entscheidbar, könnten wir auf folgende Weise auch $\Pi_{\texttt{STOP}}$ entscheiden: Sei $\zeta \in \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$. Prüfe zuerst, ob $\zeta = \xi_P$ für ein $\mathcal{A}$-Programm P (Lemma (5)). Falls doch, stelle P her und dann φ_P. Entscheide, ob $\varphi_P \in \left\{\varphi \in \mathcal{L}_0^{S_\infty} \;\middle|\; \models \varphi\right\}$ oder nicht. Wegen $(\star)$ entscheiden wir gleichzeitig, ob $\zeta = \xi_P$ zu $\Pi_{\texttt{STOP}}$ gehört oder nicht. Wir wissen aber, daß ein Entscheidungsverfahren für $\Pi_{\texttt{STOP}}$ nicht existiert (Satz (6)).

Im folgenden müssen wir noch die Abbildung $P \mapsto \varphi_P$ definieren.

3.3.2 Zuordnung einer Formel für ein Programm

- Wir verwenden folgende Notation: Sei P ein $\mathcal{A}$-Programm mit den Zeilen $\alpha_0, \dots, \alpha_k$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ minimal, so daß alle in P erwählten Register unter den $R_0, \dots, R_n$ vorkommen. Ein $(n+2)$-Tupel $\langle Z, m_0, \dots, m_n\rangle \in \mathbb{N}^{n+2}$ nennen wir eine *Konfiguration* von P. Eine Konfiguration von P heißt *die Konfiguration von P nach s Schritten* (mit $s \in \mathbb{N}$), falls das Programm P, angesetzt auf die Eingabe $\square$, mindestens s Schritte läuft und nach s Schritten die Zeilennummer Z aufgerufen wird und in den Registern $R_0, \dots, R_n$ die Zahlen $m_0, \dots, m_n$ stehen (wie oben: Identifizierung $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{N}$). Die Konfiguration von P nach 0 Schritten ist somit $\langle 0, \dots, 0\rangle \in \mathbb{N}^{n+2}$, die sogenannte *Anfangskonfiguration* .

- Klarerweise gilt nun[15]:

  $(\star\star)$ $P : \square \to \texttt{STOP}$ g.d.w. es existieren $s, m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, so daß $\langle k, m_0, \dots, m_n\rangle$ die Konfiguration von P nach s Schritten ist.

  Natürlich sind die Zahlen $s, m_0, \dots, m_n$ aus $(\star\star)$ eindeutig bestimmt, falls sie existieren. Sei deshalb s_P dieses s. Somit gilt: Falls $P : \square \to \texttt{STOP}$, so läuft das Programm s_P Schritte, bis die Stoppzeile aufgerufen wird.

[15] „$\Rightarrow$" gilt, da nur α_k eine Stoppzeile ist; „$\Leftarrow$" gilt, da α_k Stoppzeile ist

- Wähle nun in S_∞ ein $(n+3)$-stelliges Relationszeichen R, ein 2-stelliges Relationszeichen $<$ und ein 1-stelliges Funktionszeichen f und eine Konstante c, setze also $\mathcal{S} = \{R, <, f, c\}$. Nun ordnen wir dem $\mathcal{A}$-Programm P eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A}_P = (A_P, \mathsf{a}_P)$ zu, in welcher sich die Arbeitsweise von P beschreiben läßt.

  1. Fall: $P : \square \to \infty$. Sei $A_P = \mathbb{N}$, und $f^{\mathfrak{A}_P}(i) = i+1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
  2. Fall: $P : \square \to$ `STOP`. Setze $e := \max\{k, s_P\}$. Sei $A_P = \{0, \ldots, e\}$ und
  $$f^{\mathfrak{A}_P}(i) = \begin{cases} i+1 & \text{falls} \quad i < e \\ e & \text{falls} \quad i = e \end{cases}$$

  In beiden Fällen sei $<^{\mathfrak{A}_P} = <^{\mathbb{N}}$ (die natürliche Ordnung), sei $c^{\mathfrak{A}_P} = 0^{\mathbb{N}}$ und[16]

  $$\begin{aligned} R^{A_P} \quad = \quad & \big\{\langle s, Z, m_0, \ldots m_n\rangle \in \mathbb{N}^{n+3} \big| \\ & \quad \langle Z, m_0, \ldots m_n\rangle \text{ Konfiguration von } P \text{ nach } s \text{ Schritten}\big\} \end{aligned}$$

- Wir definieren nun eine Reihe von $\mathcal{S}$-Formeln, deren Konjunktion dann die Arbeitsweise von P beschreibt. Wir kürzen ab: c durch $\bar{0}$, fc durch $\bar{1}$, ffc durch $\bar{2}$ etc. Eine erste Formel ψ_0 besagt, daß $<$ eine lineare Ordnung ist mit erstem Element c, dann stets $x \leq fx$ und daß für jedes x, daß nicht größtes Element ist, fx der unmittelbare Nachfolger von x ist; also:

$$\begin{aligned} \psi_0 = \quad & \forall x \forall y \forall z (\neg x < x \wedge ((x < y \wedge y < z) \to x < z) \\ & \qquad \wedge (x < y \vee y < x \vee x \equiv y)) \\ \wedge \quad & \forall x (x < fx \vee x \equiv fx) \\ \wedge \quad & \forall x (\exists y\, x < y \to (x < fx \wedge \forall z (x < z \to (fx < z \vee fx \equiv z)))) \end{aligned}$$

- Für α eine Zeile aus $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ sei ψ_α die Formel, die Anweisung in α beschreibt. Für die folgenden Möglichkeiten von α:

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \texttt{Z LET } R_i = R_i + a_0 \\ \alpha_- &= \texttt{Z LET } R_i = R_i - a_0 \\ \alpha_{\texttt{IF}} &= \texttt{Z IF } R_i = \square \texttt{ THEN } Z' \texttt{ ELSE } Z_0 \\ \alpha_{\texttt{PRINT}} &= \texttt{Z PRINT} \end{aligned}$$

[16] Warum ist im zweiten Fall $R^{A_P} \subseteq A_P^{n+3}$, d.h. sind in den $(n+3)$-Tupeln in R^{A_P} nur Elemente $\leq e$? Ja, denn: P beginnt nach leeren Registern, kann pro Schritt ein Register nur um maximal eins erhöhen und stoppt nach maximal e Schritten.

sind die entsprechenden Formeln:

$$
\begin{aligned}
\psi_{\alpha_+} &= \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (Rx\overline{Z}y_0 \dots y_n \to \\
&\qquad (x < fx \wedge Rfx\overline{Z+1}y_0 \dots y_{i-1} f y_i y_{i+1} \dots y_n)) \\
\psi_{\alpha_-} &= \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (Rx\overline{Z}y_0 \dots y_n \to \\
&\qquad (x < fx \wedge ((y_i \equiv \bar{0} \wedge Rfx\overline{Z+1}y_0 \dots y_n) \vee \\
&\qquad\quad (\neg y_i \equiv \bar{0} \wedge \exists u (fu = y_i \wedge Rfx\overline{Z+1}y_0 \dots y_{i-1} u y_{i+1} \dots y_n))))) \\
\psi_{\alpha_{\texttt{IF}}} &= \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (Rx\overline{Z}y_0 \dots y_n \to \\
&\qquad (x < fx \wedge ((y_i \equiv \bar{0} \wedge Rfx\overline{Z'}y_0 \dots y_n) \vee \\
&\qquad\quad (\neg y_i \equiv \bar{0} \wedge Rfx\overline{Z_0}y_0 \dots y_n)))) \\
\psi_{\alpha_{\texttt{PRINT}}} &= \forall x \forall y_0 \dots \forall y_n (Rx\overline{Z}y_0 \dots y_n \to \\
&\qquad (x < fx \wedge Rfx\overline{Z+1}y_0 \dots y_n))
\end{aligned}
$$

- Sei nun

$$\psi_P = \psi_0 \wedge R \underbrace{\bar{0} \dots \bar{0}}_{(n+3)\text{mal}} \wedge \psi_{a_0} \wedge \dots \psi_{a_{k-1}}$$

Nach Definition gelten $\mathfrak{A}_P \models \psi_0$ und $\mathfrak{A}_P \models R\bar{0}\dots\bar{0}$. Weiter gilt $\mathfrak{A}_P \models \psi_{\alpha_i}$ für alle $i < k$, Beispiel:

> Sei α_Z mit $Z \in \{0, \dots, k-1\}$, z.B. α_Z die Verlängerungsanweisung $R_0 = R_0 + a_0$. Warum gilt $\mathfrak{A}_P \models \psi_{\alpha_Z}$? Sei β eine beliebige Belegung in $\mathfrak{A}_P$. Es gelte $(\mathfrak{A}_P, \beta) \models Rx\bar{Z}y_0 \dots y_n$. Im Fall $P : \Box \to \infty$ ist klarerweise $\bar{Z}^{\mathfrak{A}_P} = Z$. Falls $P : \Box \to \texttt{STOP}$, ist $Z < k \leq e$. Es folgt wieder $\bar{Z}^{\mathfrak{A}_P} = Z$. In beiden Fällen also $\{\beta(x), Z, \beta(y_0), \dots, \beta(y_n)\} \in R^{A_P}$, somit $\{Z, \beta(y_0), \dots, \beta(y_n)\}$ die Konfiguration von P nach $\beta(x)$ Schritten.
>
> Da $Z < k$ gilt in beiden Fällen $(\mathfrak{A}_P, \beta) \models x < fx$ (im Stop-Fall $b(x) < s_P$, deshalb $f^{\mathfrak{A}_P}(\beta(x)) = \beta(x) + 1$). Ebenso gilt $(\mathfrak{A}_P, \beta) \models y_i < fy_i$. Nun ist $\{Z+1, \beta(y_0)+1, \beta(y_1), \dots, \beta(y_n)\}$ die Konfiguration von P nach $\beta(x)+1$ Schritten. Aber $\beta(fx) = \beta(x)+1$ und $\overline{Z+1}^{\mathfrak{A}_P} = Z+1$ und $\beta(fy_0) = \beta(y_0)+1$.

Damit haben wir nachgewiesen: $\mathfrak{A}_P \models \psi_P$

- Sei nun

$$\varphi_P := (\psi_P \to \exists x \exists y_0 \dots \exists y_n \, Rx\bar{k}y_0 \dots y_n)$$

Damit ist $P \mapsto \varphi_P$ definiert.

3.3.3 Beweis des Satzes

- Wir können schon mal die Hinrichtung von ($\star$) beweisen:

„$\Rightarrow$" Angenommen, es gelte $\models \varphi_P$. Es folgt $\mathfrak{A}_P \models \varphi_P$. Wegen $\mathfrak{A}_P \models \psi_P$ folgt $\mathfrak{A}_P \models \exists x \exists y_0 \ldots \exists y_n\, Rx\bar{k}y_0 \ldots y_n$. Da $\bar{k}^{\mathfrak{A}_P} = k$ ist[17], gilt für gewisse $s, m_0, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$:

$$\langle s, k, m_0, \ldots, m_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}_P}$$

also ist $\langle k, m_0, \ldots, m_n \rangle$ die Konfiguration von P nach s Schritten. Aus ($\star\star$) folgt $P : \square \rightarrow \texttt{STOP}$.

- Zum Beweis der Rückrichtung von ($\star$) zeigen wir zuerst:

Behauptung: Falls $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathcal{S}$-Struktur ist mit $\mathfrak{A} \models \psi_P$ und falls $\langle Z, m_0, \ldots, m_n \rangle$ die Konfiguration von P nach s Schritten ist (d.h. insbesondere, daß P angesetzt auf $\square$ mindestens s Schritte läuft), so sind die Elemente $\bar{0}^{\mathfrak{A}}, \bar{1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \bar{s}^{\mathfrak{A}}$ paarweise verschieden, und es gilt:

$$\mathfrak{A} \models R\bar{s}\bar{Z}\bar{m}_0 \ldots \bar{m}_n$$

Beweis: Induktion über s:

* Für $s = 0$ ist die Konfiguration von P nach 0 Schritten gerade $\langle 0, \ldots, 0 \rangle$. Aus $\mathfrak{A} \models \psi_P$ folgt $\mathfrak{A} \models R\bar{0} \ldots \bar{0}$.
* Sei nun die Behauptung bewiesen für s. Sei $\langle Z', m'_0, \ldots, m'_n \rangle$ die Konfiguration von P nach s Schritten.
* Es sei $\mathfrak{A} \models \psi_P$ und $\langle Z, m_0, \ldots, m_n \rangle$ die Konfiguration von P nach $s+1$ Schritten. Nach Induktionsvoraussetzung und wegen $\mathfrak{A} \models \psi_0$ folgt
$$\mathfrak{A} \models \bar{0} < \bar{1} < \ldots < \bar{s} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} \models R\bar{s}\bar{Z}'\bar{m}'_0 \ldots \bar{m}'_n$$
Klarerweise ist $Z' < k$ (wäre $Z' = k$, würde P nur s Schritte laufen). Sei $\alpha_{Z'}$ z.B. die Verländerungsanweisung $\texttt{LET}\ R_0 = R_0 + a_0$. Dann ist ja $Z = Z' + 1$, $m_0 = m'_0 + 1$, $m_i = m'_i$ für alle $i > 0$. Da $\mathfrak{A} \models \psi_{\alpha_{Z'}}$ (folgt aus $\mathfrak{A} \models \psi_P$) und $\mathfrak{A} \models R\bar{s}\bar{Z}'\bar{m}'_0 \ldots \bar{m}'_n$, folgt (siehe $\psi_{\alpha_{Z'}}$):
$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A} & \models & \bar{s} < f\bar{s} \wedge R\overline{s+1}\,\overline{Z'+1}f\bar{m}'_0\bar{m}'_1 \ldots m'_n \\ & = & \bar{s} < \overline{s+1} \wedge R\overline{s+1}\bar{Z}\bar{m}_0\bar{m}_1 \ldots m_n \end{array}$$
Also sind $\bar{0}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \overline{s+1}^{\mathfrak{A}}$ paarweise verschieden und es gilt:
$$\mathfrak{A} \models R\overline{s+1}\bar{Z}\bar{m}_0 \ldots \bar{m}_n$$

[17] Im Fall $A_P = \mathbb{N}$ gilt $\bar{n}^{\mathfrak{A}_P} = n$ stets, im Fall $A_P = \{0, \ldots, e\}$ gilt $\bar{k}^{\mathfrak{A}_P} = k$ wegen $k \leq e$.

Nun können wir die Rückrichtung ($\star$) zeigen:

„$\Leftarrow$“ Es gelte $P : \square \to \texttt{STOP}$. Nach ($\star\star$) existieren $s, m_0, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, so $\langle k, m_0, \ldots, m_n\rangle$ die Konfiguration von P nach s Schritten ist. Sei nun $\mathfrak{A}$ eine beliebige $\mathcal{S}$-Struktur mit $\mathfrak{A} \models \psi_P$. Wegen der Behauptung gilt $\mathfrak{A} \models R\bar{s}\bar{k}\bar{m}_0 \ldots \bar{m}_n$. Also folgt $\mathfrak{A} \models \exists x \exists y_0 \ldots \exists y_n Rx\bar{k}y_0 \ldots y_n$. Also gilt $\mathfrak{A} \models \varphi_P$.

3.4 Gödels Unvollständigkeitssätze

3.4.1 Definitionen

- Sei $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}} = \{+, \cdot, 0, 1\}$. Als Abkürzung für $1{+}1{+}\ldots{+}1$ (n mal) verwenden wir $\bar{n}$.

- Sei $r \geq 1, r \in \mathbb{N}$. Eine r-stellige Relation Q über $\mathbb{N}$ heißt *arithmetisch*, falls eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel $\varphi \in \mathcal{L}_r^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ existiert, so daß für alle $\{n_0, \ldots, n_{r-1}\} \in \mathbb{N}^r$ gilt:

$$\langle n_0, \ldots, n_{r-1}\rangle \in Q \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{N} \models \varphi[n_0, \ldots, n_{r-1}]$$

  Eine Funktion $F : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ heißt *arithmetisch*, falls eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel $\varphi \in \mathcal{L}_{r+1}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ existiert, so daß für alle $\{n_0, \ldots, n_r\} \in \mathbb{N}^{r+1}$ gilt:

$$F(n_0, \ldots, n_{r-1}) = n_r \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{N} \models \varphi[n_0, \ldots, n_r]$$

- Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$.

  Eine r-stellige Relation Q über $\mathbb{N}$ heißt *repräsentierbar* in Φ, falls eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel $\varphi \in \mathcal{L}_r^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ existiert, so daß für alle $\{n_0, \ldots, n_{r-1}\} \in \mathbb{N}^r$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle n_0, \ldots, n_{r-1}\rangle \in Q &\implies \Phi \vdash \varphi[n_0 \ldots n_{r-1}] \\ \langle n_0, \ldots, n_{r-1}\rangle \notin Q &\implies \Phi \vdash \neg\varphi[n_0 \ldots n_{r-1}] \end{aligned}$$

  Eine Funktion $F : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ heißt *repräsentierbar* in Φ, falls eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel $\varphi \in \mathcal{L}_{r+1}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ existiert, so daß für alle $\{n_0, \ldots, n_r\} \in \mathbb{N}^r$ gilt[18]:

$$\begin{aligned} F(n_0, \ldots, n_{r-1}) = n_r &\implies \Phi \vdash \varphi[n_0 \ldots n_r] \\ F(n_0, \ldots, n_{r-1}) \neq n_r &\implies \Phi \vdash \neg\varphi[n_0 \ldots n_r] \\ & \Phi \vdash \exists! v_r \varphi[n_0 \ldots n_r v_r] \end{aligned}$$

  Eine Menge $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ *erlaubt Repräsentierungen*, falls jede entscheidbare Relation über $\mathbb{N}$ und jede berechenbare Funktion über $\mathbb{N}$ in Φ repräsentierbar ist.

[18] Hier ist $\exists!$ „es existiert genau ein“.

- Klarerweise ist *arithmetisch* dasselbe wie *repräsentierbar in* $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$, da für jedes $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi \;&\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \vdash \varphi \\ \mathcal{N} \models \neg\varphi \;&\Leftrightarrow\; \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \vdash \neg\varphi \end{aligned}$$

- Sei Φ_{PA} die Menge der *Peano-Axiome*, d.h. der folgenden (unendlich vielen) $\mathcal{S}^{Ar}$-Sätze:

$$\begin{array}{rl} \forall x\ \neg x+1 \equiv 0 & \forall x \forall y\ (x+1 \equiv y+1 \to x \equiv y) \\ \forall x\ x+0 \equiv x & \forall x \forall y\ x+(y+1) \equiv (x+y)+1 \\ \forall x\ x \cdot 0 \equiv 0 & \forall x \forall y\ x(y+1) \equiv x \cdot y + x \end{array}$$

  Für alle paarweise verschiedenen Variablen $x_0, \ldots, x_{n-1}, y$ und alle $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_0, \ldots, x_{n-1}, y\}$ gehört der folgende $\mathcal{S}^{Ar}$-Satz zu Φ_{PA}:

$$\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \left(\left(\varphi \frac{0}{y} \wedge \forall y (\varphi \to \varphi \frac{y+1}{y}) \right) \to \forall y \varphi \right)$$

- Für eine beliebige Menge $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ bezeichne $\Phi^{\models}$ die Menge aller $\mathcal{S}^{Ar}$-Sätze, die Konsequenzen von Φ sind, d.h.

$$\Phi^{\models} := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \;\middle|\; \Phi \models \varphi \right\} \overset{(24)}{=} \left\{ \varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \;\middle|\; \Phi \vdash \varphi \right\}$$

- Die Peano-Axiome wurden gefunden im Bemühen, $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ zu axiomatisieren, d.h. eine Menge $\Phi \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ zu finden mit $\Phi^{\models} = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ und so daß Φ möglichst einfach, klein, überschaubar etc. ist; genauer: entscheidbar ist.

  Klarerweise gilt $\Phi_{\mathrm{PA}} \subseteq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Aber aus dem Gödel'schen Unvollständigkeitssatz folgt $\Phi_{\mathrm{PA}}^{\models} \subsetneq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$; somit axiomatisiert Φ_{PA} **nicht** $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$. Es ist aber schwierig, $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{N}) \setminus \Phi_{\mathrm{PA}}^{\models}$ zu finden. Fast alle bekannten Sätze über $\mathcal{N}$ (insbesondere alle leicht beweisbaren) sind Konsequenzen von Φ_{PA}.

  Übrigens ist klar, daß Φ_{PA} eine entscheidbare Teilmenge von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}^{<\mathbb{N}}$ ist. Daraus folgt leicht mit (17), daß $\Phi_{\mathrm{PA}}^{\models}$ rekursiv aufzählbar ist. Wir werden aber sehen, daß $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ nicht rekursiv aufzählbar ist.[19]

- Sei $\mathcal{A} = \{a_0\}$, also identifizieren wir $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

  Eine r-stellige Relation $Q \subseteq \mathbb{N}^r$ heißt *entscheidbar*, falls ein $\mathcal{A}$-Programm P existiert, so daß für alle $\langle n_0, \ldots, n_{r-1} \rangle \in \mathbb{N}^r$ gilt:

[19] „Die Informatiker ändern ja gelegentlich über Nacht ihre Prüfungsordnung. . . “

– $\langle n_0, \ldots, n_{r-1} \rangle \in Q$ genau dann, wenn P, angesetzt auf n_0 im Register R_0, n_1 im Register R_1, …, n_{r-1} im Register R_{r-1}, stoppt und $\square$ ausdruckt.

– $\langle n_0, \ldots, n_{r-1} \rangle \notin Q$ genau dann, wenn P, angesetzt auf n_0 im Register R_0, n_1 im Register R_1, …, n_{r-1} im Register R_{r-1}, stoppt und genau ein nichtleeres Wort druckt.

Eine r-stellige Funktion $F : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ heißt *berechenbar*, falls ein $\mathcal{A}$-Programm P existiert, so daß für alle $\langle n_0, \ldots, n_{r-1} \rangle \in \mathbb{N}^r$ das Programm P, angesetzt auf n_0 im Register R_0, n_1 im Register R_1, …, n_{r-1} im Register R_{r-1}, stoppt und $F(n_0, \ldots, n_{r-1})$ ausdruckt.

3.4.2 repräsentierbare Funktionen und Relationen

(11) Satz: Sei $r \geq 1, r \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1. Jede r-stellige entscheidbare Relation über $\mathbb{N}$ ist repräsentierbar in Φ_{PA}.
2. Jede berechenbare Funktion $F : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ ist repräsentierbar in Φ_{PA}.

Somit erlaubt Φ_{PA} (und damit auch $\text{Th}(\mathfrak{N})$) Repräsentierungen.

Bemerkung: Im folgenden zeigen wir nun, daß rekursive Relationen bzw. Funktionen repräsentierbar sind in $\text{Th}(\mathcal{N})$. Eine genaue Analyse des Beweises ergibt die stärkere Version des Satzes.

(12) Lemma: (Gödels Lemma über die β-Funktion) Es gibt eine arithmetische Funktion $\beta : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ mit der folgenden Eigenschaft:

($\star$) Zu jeder Folge $a_0, \ldots, a_r$ über $\mathbb{N}$ existieren $t, p \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \leq r$ gilt: $\beta(t, p, i) = a_i$.

Beweis: Sei $a_0, \ldots, a_r$ eine Folge über $\mathbb{N}$. Wähle eine Primzahl p mit $p > a_0, \ldots, a_r$ und $p > r + 1$. Setze nun

$$t := 1 \cdot p^0 + a_0 p^1 + 2p^2 + a_1 p^3 + \ldots + (r+1)p^{2r} + a_r p^{2r+1} \qquad (\star\star)$$

Nach Wahl von p sind alle Koeffizienten von Potenzen von p in ($\star\star$) kleiner als p, somit ist ($\star\star$) die eindeutig bestimmte p-adische Darstellung von t. Nun gilt für alle i mit $0 \leq i \leq r$ und $a \in \mathbb{N}$:

$a = a_i$ genau dann, wenn $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ existieren mit

(i) $t = b_0 + b_1((i+1) + ap + b_2 p^2)$

(ii) $a < p$

(iii) $b_0 < b_1$

(iv) $b_1 = p^{2m}$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$

Beweis der Eigenschaft:

„$\Rightarrow$" Folgt aus ($\star\star$) mit $b_0 = 1p^0 + \ldots + a_{i-1}p^{2i-1}$, $b_1 = p^{2i}$ und $b_2 = (i+2) + a_{i+1}p + \ldots + a_r p^{2(r-i)-1}$

„$\Leftarrow$" Erhalte mit (i) und (iv): $t = b_0 + (i+1)p^{2m} + ap^{2m+1} + b_2p^{2m+2}$. Da $b_0 < p^{2m}$ und $(i+1), a < p$ liefert ein Koeffizientenvergleich mit ($\star\star$): $m = i$ und $a = a_i$. Bemerke, daß (iv) äquivalent ist zu

(iv') b_1 ist Quadratzahl und für alle $d \neq 1$ mit $d \mid b_1$ gilt $p \mid d$.

Wir definieren nun $\beta(t, p, i)$ als das eindeutig bestimmte a, so daß b_0, b_1, b_2 existieren mit den Eigenschaften (i) bis (iv'). Dann ist β wie gewünscht, nur daß es noch nicht total ist und wir noch zeigen müssen, daß es arithmetisch ist. Dazu erweitern wir die Definition von β auf beliebige Tripel $\langle n, q, j\rangle \in \mathbb{N}^3$ wie folgt: $\beta(n, q, j)$ ist das kleinste a, so daß b_0, b_1, b_2 existieren mit

(i) $u = b_0 + b_1((j+1) + aq + b_2q^2)$

(ii) $a < q$

(iii) $b_0 < b_1$

(iv) b_1 ist Quadratzahl und für alle $d \neq 1$ mit $d \mid b_1$ gilt $q \mid d$.

Falls kein solches a existiert, so setzen wir $\beta(n, q, j) = 0$.

Diese Definition läßt sich leicht durch eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel φ_β wiedergeben, d.h. β wird durch $\varphi_\beta(v_0, v_1, v_2, v_3)$ repräsentiert.

- Sei P ein Programm über $\mathcal{A} = \{a_0\}$ mit den Zeilen $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$. Sei $n \in \mathbb{N}$ minimal, so daß alle in P genannten Register unter den Registern $R_0, \ldots, R_n$ vorkommen. Wie früher sei eine Konfiguration von P ein $(n+2)$-Tupel $\langle Z, m_0, \ldots, m_n\rangle$ Sie gibt die Situation einer P-Berechnung wieder, bei der die Zeile α_Z aufgerufen wird und bei der in den Registern $R_0, \ldots, R_n$ die Zahlen $m_0, \ldots, m_n$ stehen. Seien nun C, C' zwei Konfigurationen von P. Eine P-Berechnung auf der Registermaschine befinde sich in der Konfiguration C. Falls nach Ausführung der in C genannten Zeile die Konfiguration C' ermittel wird, so schreiben wir $C \to_P C'$.

(13) Lemma: Zu jedem $\mathcal{A}$-Programm P existiert eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel $\xi_P \in \mathcal{L}_{2n+3}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ (wir schreiben explizit $\xi_P = \xi_P(x_0, \dots, x_n, z, y_0, \dots, y_n)$), so daß für alle $l_0, \dots, l_n, Z, m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ gilt:

> $\mathcal{N} \models \xi_P[l_0, \dots, l_n, Z, m_0, \dots, m_n]$ genau dann, wenn P, beginnend mit der Konfiguration $\langle 0, l_0, \dots, l_n\rangle$ nach endlich vielen Schritten die Konfiguration $\langle Z, m_0, \dots, m_n\rangle$ erreicht.

Beweis: Die gesuchte Formel $\xi_P(x_0, \dots, x_n, z, y_0, \dots, y_n)$ soll folgendes besagen:

($\star$) Es existieren $s \in \mathbb{N}$ und eine Folge $C_0, \dots, C_s$ von Konfigurationen von P, so daß $C_0 = \langle 0, x_0, \dots, x_n\rangle$ und $C_s = \langle z, y_0, \dots, y_n\rangle$ ist und für alle $i < s$ gilt: $C_i \to_P C_{i+1}$.

Da wir eine $(s+1)$-Folge von $(n+2)$-Folgen in eine $(s+1)\cdot(n+2)$-Folge zusammenfassen können, erhalten wir aus ($\star$):

($\star\star$) Es existieren $s \in \mathbb{N}$ und eine Folge

$$\{\underbrace{a_0, \dots, a_{(n+1)}}_{C_0}, \underbrace{a_{(n+2)+0}, \dots, a_{(n+2)+(n+1)}}_{C_1}, \dots, \underbrace{a_{s\cdot(n+2)}, \dots, a_{s\cdot(n+2)+(n+1)}}_{C_s}\}$$

so daß $a_0 = 0, a_1 = x_0, \dots, a_{n+1} = x_n$, $a_{s\cdot(n+2)} = z, a_{2\cdot(n+2)+1} = y_0, \dots, a_{s\cdot(n+2)+(n+1)} = y_n$ und für alle $i < s$ gilt

$$\left\langle a_{i\cdot(n+2)}, \dots, a_{i\cdot(n+2)+(n+1)}\right\rangle \to_P \left\langle a_{(i+1)\cdot(n+2)}, \dots, a_{(i+1)\cdot(n+2)+(n+1)}\right\rangle$$

Sei φ_β die die β-Funktion aus Lemma (12) repräsentierende Formel, d.h. für alle $t, p, i, a \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{N} \models \varphi_\beta[t, p, i, a]$ genau dann, wenn $\beta(t, p, i) = a$ ist. Sei $\xi_P(x_0, \dots, x_n, z, y_0, \dots y_n)$ die Formel

$$\begin{aligned}
\exists s \exists p \exists t \quad (\quad & \varphi_\beta[t, p, 0, 0] \wedge \varphi_\beta[t, p, 1, x_0] \wedge \dots \wedge \varphi_\beta[t, p, \overline{n+1}, x_n] \wedge \\
& \varphi_\beta[t, p, s \cdot \overline{(n+2)}, z] \wedge \\
& \varphi_\beta[t, p, s \cdot \overline{(n+2)} + 1, y_0] \wedge \dots \wedge \varphi_\beta[t, p, s \cdot \overline{(n+2)} + \overline{n+1}, y_n] \\
& \wedge \forall i < s \forall u \forall u_0 \dots \forall n_n \forall u' \forall u'_0 \dots \forall u'_n \\
& \qquad ((\varphi_\beta[t, p, i \cdot \overline{(n+2)}, u] \wedge \varphi_\beta[t, p, i \cdot \overline{(n+2)} + 1, u_0] \wedge \dots \wedge \\
& \qquad \quad \varphi_\beta[t, p, i \cdot \overline{(n+2)} + \overline{n+1}, u_n] \wedge \varphi_\beta[t, p, (i+1) \cdot \overline{(n+2)}, u'] \wedge \\
& \qquad \quad \varphi_\beta[t, p, (i+1) \cdot \overline{(n+2)} + 1, u'_0] \wedge \dots \wedge \\
& \qquad \quad \varphi_\beta[t, p, (i+1) \cdot \overline{(n+2)} + \overline{n+1}, u'_n]) \\
& \qquad \quad \to \text{„}(u, u_0, \dots, u_n) \to_P (u', u'_0, \dots, u'_n)\text{“}
\end{aligned}$$

Dann ist ξ_P eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel, wenn wir uns noch klarmachen können, wie

$$„(u, u_0, \dots, u_n) \to_P (u', u'_0, \dots, u'_n)“ \qquad (\star\star\star)$$

durch eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel ausgedrückt werden kann. Sei dazu wieder $P = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_k \rangle$. Die gesuchte Formel hängt davon ab, welche Zeilennummer u benennt. Jedem $j < k$ ordnen wir eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel ψ_j zu: Falls α_j z.B. die Gestalt `j LET` $R_1 = R_1 + a_0$ hat, ist

$$\psi_j := u \equiv j \to u' \equiv u{+}1 \wedge u'_0 \equiv u_0 \wedge u'_1 \equiv u_1{+}1 \wedge u'_2 \equiv u_2 \wedge \dots \wedge u'_n \equiv u_n)$$

Falls α_j zum Beispiel die Gestalt `j LET` $R_0 = R_0 - a_0$ hat, ist

$$\begin{aligned} \psi_j := u \equiv j \to \quad & (u' \equiv u + 1 \wedge (\neg u_0 \equiv 0 \to u'_0 + 1 \equiv u_0) \wedge \\ & (u_0 \equiv 0 \to u'_0 \equiv u_0) \wedge u'_1 \equiv u_1 \wedge \dots \wedge u'_n \equiv u_n) \end{aligned}$$

Falls α_j die Gestalt `j IF` $R_0 = \square$ `THEN` Z `ELSE` Z_0 hat, ist

$$\begin{aligned} \psi_j := u \equiv j \to \quad & (u_0 \equiv 0 \to (u' \equiv \bar{Z} \wedge u_0 \equiv u'_0 \wedge \dots \wedge u_n \equiv u'_n)) \\ & \wedge(\neg u_0 \equiv 0 \to (u' \equiv \bar{Z}_0 \wedge u_0 \equiv u'_0 \wedge \dots \wedge u_n \equiv u'_n)) \end{aligned}$$

Entsprechend für andere Zeilen. Wir können nun die Konjunktion $\psi_0 \wedge \dots \wedge \psi_{k-1}$ in ξ_P an die Stelle von $(\star\star\star)$ setzen und erhalten so das gewünschte ξ_P.

- **Beweis** von Satz (11) (wir zeigen nur 1., der zweite Teil folgt analog):

  Sei Q eine r-stellige, entscheidbare Relation über $\mathbb{N}$. Sei P ein $\{a_0\}$-Programm, welches Q entscheidet. Wähle $n \in \mathbb{N}$ minimal, so daß $n > r$ und alle in P genannten Register unter $R_0, \dots, R_n$ sein. Seien weiter $\alpha_{Z_0}, \dots, \alpha_{Z_m}$ die Zeilen von P, die eine Druckanweisung enthalten. Sei nun

  $$\xi_P = \xi_P(x_0, \dots, x_n, z, y_0, \dots, y_n) \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}_{2n+3}$$

  wie in Lemma (13). Dann gilt für beliebige $l_0, \dots, l_{r-1} \in \mathbb{N}$:

  > $\langle l_0, \dots, l_{r-1} \rangle \in Q$ genau dann, wenn P, ausgehend von der Konfiguration $\langle 0, \dots, l_0, \dots, l_{r-1}, 0, \dots, 0 \rangle \in \mathbb{N}^{n+2}$ nach endlich vielen Schritten eine Konfiguration der Gestalt $\{Z_i, 0, m_1, \dots, m_n\}$ erreicht, wobei $0 \leq i \leq m$ und $m_1, \dots, m_n$ beliebig (d.h. P erreicht eine Druckanweisung, bei der $\square$ im Ausgaberegister steht).

Da nach Voraussetzung P Q entscheidet, wissen wir, daß im weiteren Verlauf von P keine Ausgabe mehr erfolgen wird und P stoppen wird. Obiges ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\mathcal{N} \models \quad & \exists v_{n+3} \ldots \exists v_{2n+2} \\ & \quad (\xi_P(l_0, \ldots, l_{r-1}, 0, \ldots, 0, Z_0, 0, v_{n+3}, \ldots, v_{2n+2}) \\ & \quad \vee \ldots \vee \xi_P(l_0, \ldots, l_{r-1}, 0, \ldots, 0, Z_m, 0, v_{n+3}, \ldots, v_{2n+2}))\end{aligned}$$

Als die Relation Q repräsentierende $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Formel $\varphi \in \mathcal{L}_{r+1}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ können wir also folgende Formel nehmen:

$$\exists v_{n+3} \ldots \exists v_{2n+2} \bigvee_{i=0}^{m} \xi_P(l_0, \ldots, l_{r-1}, 0, \ldots, 0, Z_i, 0, v_{n+3}, \ldots, v_{2n+2})$$

3.4.3 Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit

- Wir kennen die lexikographische Ordnung auf $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}^{<\mathbb{N}}$. Da $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}^{<\mathbb{N}}$ können wir für jedes $\varphi \in \mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ setzen: $\#\varphi := n$, falls φ an der Stelle n in der lexikographischen Aufzählung von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}^{<\mathbb{N}}$ steht. Wir wissen auch, daß die Funktion $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi \mapsto \#\varphi$ berechenbar ist.

(14) Satz: (Fixpunktsatz) Sei Φ eine Menge von $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Sätzen, die Repräsentierung erlaubt. Dann existiert zu jedem $\psi \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ ein $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Satz φ, so daß gilt[20]:

$$\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\#\varphi)$$

Die Formel φ besagt dann: „Die Eigenschaft ψ trifft auf mich zu.“ φ ist sozusagen ein Fixpunkt von ψ.

Beweis: Definiere eine Funktion $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$F(n, m) = \begin{cases} \#(\psi(m)) & \text{falls} \quad n = \#\psi \text{ für ein } \psi \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ und $\mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ entscheidbare Teilmengen von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}^{<\mathbb{N}}$ sind und die Funktion $\varphi \mapsto \#\varphi$ berechenbar ist, ist F berechenbar. Nach Voraussetzung ist somit F repräsentierbar in Φ, d.h. es existiert eine Formel $\alpha(v_0, v_1, v_2) \in \mathcal{L}_3^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$, die F in Φ repräsentiert. Nach Definition von F gilt $F(\#\xi, m) = \#(\xi(m))$ für alle $\xi \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$.

Sei nun $\psi \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ beliebig vorgegeben. Wir wollen einen Fixpunkt $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ von ψ finden. Setze

$$\beta := \forall v_2(\alpha(v_0, v_0, v_2) \to \psi(v_2))$$

[20] Wir schreiben wieder $\psi(\#\varphi)$ anstelle von $\psi\frac{\#\varphi}{v_0}$.

Also $\beta \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$. Weiter sei $\varphi := \beta(\#\beta)$, folglich ist $F(\#\beta, \#\beta) = \#(\beta(\#\beta)) = \#\varphi$. Nach Definition von α gilt

$$\Phi \vdash \alpha(\#\beta, \#\beta, \#\varphi) \tag{$\star$}$$

Wir wollen nun $\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\#\varphi)$ zeigen.

„$\rightarrow$" Nach Definition von φ folgt $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \alpha(\#\beta, \#\beta, \#\varphi) \rightarrow \psi(\#\varphi)$. Mit ($\star$) folgt: $\Phi \cup \{\varphi\} \vdash \psi(\#\varphi)$. Es folgt $\Phi \vdash \varphi \rightarrow \psi(\#\varphi)$.

„$\leftarrow$" Da α F in Φ repräsentiert, gilt insbesondere $\Phi \vdash \exists! v_2 \alpha(\#\beta, \#\beta, v_2)$. Mit ($\star$) folgt $\Phi \vdash \forall v_2(\alpha(\#\beta, \#\beta, v_2) \rightarrow v_2 \equiv \#\varphi)$. Es folgt

$$\Phi \vdash \psi(\#\varphi) \rightarrow \forall v_2(\alpha(\#\beta, \#\beta, v_2) \rightarrow \psi(v_2))$$

Also $\Phi \vdash \psi(\#\varphi) \rightarrow \varphi$.

(15) Korollar: Sei Φ eine konsistente Menge von $\mathcal{S}_{Ar}$-Sätzen, welche Repräsentierungen erlaubt. Dann ist die Menge

$$\Phi^{\vdash} := \left\{ \alpha \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}} \;\middle|\; \Phi \vdash \alpha \right\}$$

nicht repräsentierbar in Φ; was besagen soll, daß die einstellige Relation $\left\{ \#\alpha \mid \alpha \in \Phi^{\vdash} \right\}$ nicht repräsentierbar ist in Φ.

Beweis (indirekt): Angenommen, es gäbe $\chi(v_0) \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$, welche $\Phi^{\vdash}$ in Φ repräsentiert. Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi \vdash \begin{cases} \chi(\bar{n}) & \text{falls} \quad n \in \left\{ \#\alpha \mid \alpha \in \Phi^{\vdash} \right\} \\ \neg\chi(\bar{n}) & \text{falls} \quad n \notin \left\{ \#\alpha \mid \alpha \in \Phi^{\vdash} \right\} \end{cases}$$

Da Φ konsistent ist, erhalten wir für alle $\alpha \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$:

$$\Phi \vdash \neg\chi(\#\alpha) \text{ g.d.w. nicht } \Phi \vdash \alpha \tag{1}$$

„$\Rightarrow$" Aus ConΦ folgt, daß nicht $\Phi \vdash \chi(\#\alpha)$, also gilt nicht $\#\alpha \in \left\{ \#\beta \mid \beta \in \Phi^{\vdash} \right\}$, also $\alpha \notin \Phi^{\vdash}$, d.h. nicht $\Phi \vdash \alpha$.

„$\Leftarrow$" Es gilt $\#\alpha \notin \left\{ \#\beta \mid \beta \in \Phi^{\vdash} \right\}$, also $\Phi \vdash \neg\xi(\#\alpha)$.

Nach Satz (14) hat $\neg\chi$ einen „Fixpunkt", d.h. es existiert $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ mit

$$\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\chi(\#\varphi) \tag{2}$$

Da $\neg\chi(\#\varphi)$ besagt, daß φ nicht aus Φ ableitbar ist, besagt φ: „Ich bin nicht beweisbar." Aber nun folgt:

$\Phi \vdash \varphi$ genau dann (2), wenn $\Phi \vdash \neg\chi(\#\varphi)$, genau dann (1), wenn nicht $\Phi \vdash \varphi$.

Ein Widerspruch!

- Wir erhalten den Satz Tarski über die „Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit“, genauer: Es existiert keine Wahrheitsdefinition für die Arithmetik innerhalb der Arithmetik.

(16) Satz: (Tarski)

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\text{Ar}}}$ konsistent und Φ erlaube Repräsentierung. Dann ist $\Phi^{\models}$ nicht repräsentierbar in Φ.

(b) $\text{Th}(\mathcal{N})$ ist nicht repräsentierbar in $\text{Th}(\mathcal{N})$.

Beweis:

(a) Der Vollständigkeitssatz impliziert $\Phi^{\vdash} = \Phi^{\models}$. Somit folgt die Behauptung aus Korollar (15).

(b) Klarerweise gilt $\text{Th}(\mathcal{N})^{\models} = \text{Th}(\mathcal{N})$; weiter ist $\text{Th}(\mathcal{N})$ konsistent und erlaubt Repräsentierungen nach Satz (11). Somit ist (b) ein Spezialfall von (a).

3.4.4 entscheidbare Theorien

- **Definition:** Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Symbolmenge und $T \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$. Dann heißt T *Theorie*, falls T konsistent ist und $T = T^{\vdash}$; d.h. jeder Satz, der aus T folgt, gehört schon zu T.

  Bemerkung: T ist also Theorie genau dann, wenn $T = \Phi^{\vdash}$ für ein konsistentes $\Phi \subseteq \mathcal{S}_0^{\mathcal{L}}$.

  Beispiele:

  - $\emptyset^{\vdash} = \left\{\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}} \;\middle|\; \vdash \varphi\right\}$
  - $\text{Th}_{PA} := \Phi_{\text{PA}}^{\vdash}$ (die Peano-Arithmetik)
  - $\text{Th}(\mathcal{N})$ $(= \left\{\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\text{Ar}}} \;\middle|\; \mathcal{N} \models \varphi\right\})$ die (Theorie der) Arithmetik

- **Definition:** Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Symbolmenge. Eine Theorie $T \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ heißt *rekursiv axiomatisierbar*, falls eine rekursiv entscheidbare Satzmenge $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ existiert mit $\Phi^{\vdash} = T$ (die Sätze in Φ können als Axiome der Theorie T dienen).

- **Beispiele:**

(1) Wir haben schon festgestellt, daß $\Phi_{\text{PA}} \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\text{Ar}}}$ entscheidbar ist. Die Peano-Arithmetik $\Phi_{\text{PA}}^{\vdash}$ ist somit rekursiv axiomatisierbar.

(2) Wir werden gleich sehen, daß $\text{Th}(\mathcal{N})$ nicht rekursiv axiomatisierbar ist.

(17) Satz: Jede rekursiv axiomatisierbare Theorie ist rekursiv aufzählbar.

Beweis: Sei $T = \Phi^{\vdash} \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\text{Ar}}}$ für eine entscheidbare Menge $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$. Ein Aufzählverfahren von T ist etwa das folgende: Stelle systematisch alle im Sequenzenkalkül der Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ ableitbaren Sequenzen her. Mit dem Entscheidungsverfahren für Φ prüfe man, ob die Glieder des Antezedens alle zu Φ gehören oder nicht (verwende dazu, daß Φ entscheidbar ist). Im ersten Fall drucken wir das Sukzedens aus, im zweiten wird nicht gedruckt, sondern zur nächsten ableitbaren Sequenz übergegangen.

- **Definition:** Eine Theorie $T \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ heißt *vollständig*, falls $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$ gilt für jeden $\mathcal{S}$-Satz φ.

(18) Satz:

(a) Jede rekursiv axiomatisierbare und vollständige Theorie ist entscheidbar.

(b) Jede rekursiv aufzählbare und vollständige Theorie ist entscheidbar.

Beweis:

(a) Wegen Satz (17) genügt es, (b) zu beweisen.

(b) Sei T eine aufzählbare vollständige Theorie. Sei φ ein beliebiger Satz, von dem wir entscheiden wollen, ob er zu T gehört oder nicht. Wir lassen das Aufzählverfahren von T solange laufen, bis φ oder $\neg\varphi$ erscheint. Da T vollständig ist geschieht dies. Da T konsistent ist, wissen wir im zweiten Fall, daß $\varphi \notin T$ ist.

3.4.5 Unvollständigkeitssätze von Gödel

(19) Satz: (Erster Unvollständigkeitssatz von Gödel) Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\text{Ar}}}$ eine konsistente, entscheidbare Menge, welche Repräsentierungen erlaubt. Dann existiert ein $\mathcal{S}_{Ar}$-Satz φ, so daß weder $\Phi \vdash \varphi$ noch $\Phi \vdash \neg\varphi$ Die Theorie $\Phi^{\vdash}$ ist also nicht vollständig.

Beweis (indirekt): Angenommen, $\Phi^{\vdash}$ wäre vollständig. Nach Voraussetzung ist $\Phi^{\vdash}$ rekursiv axiomatisierbar (durch Φ). Dann ist $\Phi^{\vdash}$ entscheidbar nach Satz (18a). Somit auch $\left\{ \#\alpha \mid \alpha \in \Phi^{\vdash} \right\}$. Da nach Voraussetzung Φ Repräsentierungen erlaubt, ist $\Phi^{\vdash}$ repräsentierbar in Φ. Das ist ein Widerspruch zu Korollar (15).

(20) Korollar: $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist nicht rekursiv aufzählbar und folglich (siehe Satz (17)) nicht rekursiv axiomatisierbar. Insbesondere gilt also $\Phi_{\mathrm{PA}}^{\vdash} \subsetneq \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

Beweis: Angenommen, $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ wäre rekursiv aufzählbar. Offensichtlich ist $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ eine vollständige, konsistente Theorie. Wegen Satz (18b) wäre $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ sogar entscheidbar, nach Satz (11) erlaubt $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ Repräsentierungen. Nach Satz (19) wäre $\mathrm{Th}(\mathcal{N})^{\vdash}$ unvollständig. Aber $\mathrm{Th}(\mathcal{N})^{\vdash} = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist vollständig, Widerspruch!

- Analog wie wir Programme für die Registermaschine lexikographisch geordnet haben, können wir auch alle Ableitungen im Sequenzenkalkül der Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ lexikographisch ordnen. Die Funktion, die jedem $m \in \mathbb{N}$ die m-te Ableitung (bezüglich dieser Ordnung) zuordnet ist dann berechenbar. Sei nun $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ entscheidbar und erlaube Repräsentierungen. Nach dem Gesagten ist dann die folgende zweistellige Relation H über $\mathbb{N}$ entscheidbar:

  $\langle n, m\rangle \in H :\Leftrightarrow$ die m-te Ableitung endet mit einer Sequenz der Gestalt $\psi_0 \cdots \psi_{k-1}\varphi$, wobei $\psi_0, \dots, \psi_{k-1} \in \Phi$ und $\#\varphi = n$.

  Aus der Definition von H folgt: $\Phi \vdash \varphi$ genau dann, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $\langle \#\varphi, m\rangle \in H$. Da nach Voraussetzung Φ Repräsentierungen erlaubt, finden wir $\varphi_H(v_0, v_1) \in \mathcal{L}_2^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$, so daß φ_H H in Φ repräsentiert, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

  - Falls $\langle n, m\rangle \in H$, so $\Phi \vdash \varphi_H(\bar{n}, \bar{m})$
  - Falls $\langle n, m\rangle \notin H$, so $\Phi \vdash \neg\varphi_H(\bar{n}, \bar{m})$

  Definiere $\mathrm{Abl}_\Phi(v_0) \in \mathcal{L}_1^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ durch

  $$\mathrm{Abl}_\Phi(v_0) := \exists v_1 \varphi_H(v_0, v_1)$$

  Man mache sich klar, daß $\mathrm{Abl}_\Phi(v_0)$ nicht etwa $\Phi^{\vdash}$ repräsentiert (was nach Korollar (15) nicht möglich ist)[21] Nach Satz (14) besitzt $\neg\mathrm{Abl}_\Phi(v_0)$ einen Fixpunkte $\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$, also gilt

  $$\Phi \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Abl}_\Phi(\#\varphi) \qquad (\star)$$

[21] Falls $n \in \{\#\alpha \mid \alpha \in \Phi^{\vdash}\}$, so existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\langle n, m\rangle \in H$, also $\Phi \vdash \mathrm{Abl}_\Phi(n)$. Falls aber $n \notin \{\#\alpha \mid \alpha \in \Phi^{\vdash}\}$ müßte man $\Phi \vdash \neg\exists v_1 \varphi_H(n, v_1)$ haben. Aber wir wissen nur, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\Phi \vdash \neg\varphi_H(n, m)$. Es können aber Nicht-Standard-Elemente existieren, die nicht als $m \in \mathbb{N}$ darstellbar sind.

Der Satz φ besagt also etwa „ich bin nicht ableitbar." Deshalb ist folgendes Lemma nicht erstaunlich:

(21) Lemma: Falls Φ konsistent ist (und entscheidbar und erlaube Repräsentierungen), so gilt *nicht* $\Phi \vdash \varphi$.

Beweis: Wäre $\Phi \vdash \varphi$, so können wir $m \in \mathbb{N}$ finden mit $\langle \#\varphi, m \rangle \in H$, also $\Phi \vdash \varphi_H(\#\varphi, m)$ und somit

$$\Phi \vdash \underbrace{\exists v_1 \varphi_H(\#\varphi, v_1)}_{\mathrm{Abl}_\Phi(\#\varphi)}$$

Aber mit $(\star)$ folgt aus $\Phi \vdash \neg \mathrm{Abl}_\Phi(\#\varphi)$, somit ist Φ nicht konsistent, Widerspruch.

- Lemma (21) besagt also $\mathrm{Con}\Phi \Rightarrow \text{nicht} \Phi \vdash \varphi$. Diese Aussage läßt sich nun in $\mathcal{L}^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ formalisieren und in Φ beweisen (falls $\Phi_{\mathrm{PA}} \subseteq \Phi$). Offensichtlich ist Φ konsistent genau dann, wenn nicht $\Phi \vdash \neg 0 \equiv 0$. Deshalb definieren wir den $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Satz con_Φ durch

$$\mathrm{con}_\Phi := \neg \mathrm{Abl}_\Phi(\# \neg 0 \equiv 0)$$

Die formale Version von Lemma (21) ist nun:

(22) Lemma: $\Phi \vdash \mathrm{con}_\Phi \to \neg \mathrm{Abl}_\Phi(\#\varphi)$, falls[22] $\Phi_{\mathrm{PA}} \subseteq \Phi$.

Beweis ist langwierig.

(23) Satz: (Zweiter Unvollständigkeitssatz von Gödel) Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}}$ konsistent und entscheidbar, und es gelte $\Phi_{\mathrm{PA}} \subseteq \Phi$. Dann gilt nicht $\Phi \vdash \mathrm{con}_\Phi$.

Beweis: Andernfalls würde mit Lemma (22) $\Phi \vdash \neg \mathrm{Abl}_\Phi(\#\varphi)$. Aus $(\star)$ folgt $\Phi \vdash \varphi$, ein Widerspruch zu Lemma (21).[23]

... nicht wahr?

der KLARERWEISE®-Counter: **17**

[22] unter der Voraussetzung, daß φ_H „nicht zu kompliziert" ist

[23] „Ich habe kein feierliches Ende für die Vorlesung vorbereitet."

Index