

Multimediale Informationsverarbeitung

Mitschrift von www.kuertz.name

Hinweis: Dies ist **kein offizielles Script**, sondern nur eine private Mitschrift. Die Mitschriften sind teilweise **unvollständig, falsch oder inaktuell**, da sie aus dem Zeitraum 2001–2005 stammen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so freue ich mich dennoch über einen kurzen Hinweis per E-Mail – vielen Dank!

Klaas Ole Kürtz (klaasole@kuertz.net)

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Psychoakustische Wahrnehmung	3
2.1	Physikalische Grundlagen	3
2.2	Physiologisches Modell des Hörens	3
2.3	Psychooptisches Modell des Hörens	4
3	Psychooptische Wahrnehmung	5
3.1	Physikalische Grundlagen	5
3.2	Physiologisches Modell des Sehens	5
3.3	Psychooptisches Modell des Sehens	5
4	Repräsentation und Codierung von Signalen	6
5	Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung	8
5.1	Signale und Systeme	8
5.1.1	Grundlagen und Klassifikation von Signalen	8
5.1.2	Elementarsignale und deren Transformation	9
5.1.3	Transformation von Signalen	10
5.1.4	Der Dirac-Impuls	11
5.1.5	Grundlagen und Klassifikation von Systemen	12
5.2	<i>Einschub</i> : Komplexe Zahlen	12
5.3	Faltung	13
5.3.1	Kontinuierliche Faltung	13
5.3.2	Diskrete Faltung	15
5.3.3	Die Faltungsalgebra	16
5.4	Fourier-Transformation	17
5.4.1	Motivation	17
5.4.2	periodische Signale	18
5.4.3	aperiodische Signale	18
5.4.4	Zusammenfassung	20

1 Einführung

Multimediale Informationsverarbeitung besteht aus

- **Multimediale Information:** Information, die auf mehreren unterschiedlichen Medien transportiert wird. Dabei sind Medien Vermittler, die Information an die verschiedenen menschlichen Wahrnehmungsorgane übermitteln (wobei hier nur die Sinne \star behandelt werden):

Sinn			Medium
Gehörsinn	akustisch	\star	Schallwellen
Gesichtssinn	optisch	\star	Lichtwellen
Tastsinn	haptisch		Kraft
Geruchssinn	olfaktorisch		Partikel
Geschmackssinn			Partikel (chemisch)
Gleichgewichtssinn			Kraftfeld

Der **Transfer von Information** auf dem physikalischen Medium (z. B. Schallwellen) gehorcht physikalischen Gesetzen, sie ist objektiv messbar (z. B. Schalldruck, Schwingungszahl) und beschreibbar als Signal, welches auf einen Sensor (z. B. Trommelfell und Innenohr) trifft.

Die **Wahrnehmung des Signals** durch den Menschen ist physikalisch begrenzt durch den Sensor (z. B. Frequenzgang, Sensordichte) und ist abhängig vom Signalverhaltensverhalten des Nervensystems (lokale Verarbeitung, Verkopplung der Nerven mit Sinneszellen). Zudem spielen **kognitive Wahrnehmungseffekte** des Gehirns eine Rolle: Die Wahrnehmung ist nur subjektiv messbar (z. B. Lautheit), sie ist in hohem Maße nichtlinear und adaptiv (Licht/Schalladaptation) und es werden nicht alle physikalischen Signale bewusst wahrgenommen (Irrelevanz im Signal vorhanden).

- **Systeme zur Informationsverarbeitung** sollen physikalische Signale von den Medien (z. B. Schall, Licht) aufnehmen, die von den Signalen mitgeführte Information extrahieren, transformieren, speichern (d.h. für menschliche Wahrnehmung geeignet verarbeiten) und dann wieder für die menschlichen Sinne geeignet ausgeben.

Komponenten multimedialer informationsverarbeitender Systeme sind:



- **Signalwandlung** (Mikros, Lautsprecher, Kameras, Monitore)
 - Wandlung der physikalischen Signale in geeignete diskrete Signale (*Abtastung*)
 - Wandlung der diskreten Signale in physikalische Signale (*Rekonstruktion*)
- **Signalrepräsentation und Speicherung**
 - interne Abstraktion der Signale zu Daten
 - Codierung, Speicherung und Transfer der Daten
- **Informationsverarbeitung**
 - Umformung und Transformation der Daten mit dem Ziel, die inhärente Information zu extrahieren (zielgerichtet mit bestimmten Gütekriterien, z. B. die Reduktion der Redundanz, oder Elimination der Irrelevanz)
 - Gütekriterien sind zumeist auf die Wahrnehmungseigenschaften der Menschen angepasst
 - Kompromisse zwischen technischen Erfordernissen (z. B. Bandbreite, Speicherplatz) und subjektiven Qualitätsanforderungen müssen gelöst werden.

2 Psychoakustische Wahrnehmung

2.1 Physikalische Grundlagen

Musik und Sprache sind zeitkontinuierliche Luftdruckschwankungen:

$$s(t) = A \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_0) \text{ mit } 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

Schall breitet sich im Raum ca. mit $330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus. Dabei unterscheidet man bei den *Frequenzen* stimmhafte Laute (reine Töne) und stimmlose Laute (Zischlaut etc.); periodische und aperiodische Signale.

Die *Amplitude* des *Schalldrucks* (*Sound Pressure Level, SPL*) wird zunächst gemessen in $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$, aber angegeben in *Dezibel* (dB): Definiere die Hörschwelle $A_0 := 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$; weiter sei

$$1 \text{ bel} = \log \frac{A_1}{A_0} \quad \text{und} \quad 1 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{A_1}{A_0}$$

Man unterscheidet folgende *Frequenzbereiche* und den *hörbaren Amplitudenbereich*:

Infraschall	0 bis 20Hz
Hörschall	20 bis 20.000Hz
Ultraschall	> 20.000Hz
Hörschwelle hörbarer Bereich	10^{-12} bis $1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ = 0 bis 120 dB

Folgende Geräusche haben typischerweise folgende Lautstärke-Bereiche:

Hörschwelle	0 dB	$10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	Der direkte Schall dient zur Ortung, der frühe Schall läßt den Raumklang entstehen; andere, öfter reflektierte Signale werden vom Gehirn ausgeblendet.
Papierrascheln	20 dB	$10^{-10} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	
Sprache	60 dB	$10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	
Verehr	80 dB	$10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	
Flugzeugstart	120 dB	$1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$	

2.2 Physiologisches Modell des Hörens

siehe Folien

2.3 Psychooptisches Modell des Hörens

Subjektive Tests liefern Modelle der Psychoakustik – dabei verwendet man *just noticeable differences (JND)*, d.h. gerade noch wahrnehmbare Änderungen

- **Hörschwellen:** neben der Ruheshwelle (ja/nein-Entscheidung) betrachtet man die JND: typisch ± 1 dB (SPL), der hörbare Bereich ist unterteilt in ca. 350 Stufen eingeteilt
- **Frequenzwahrnehmung:** JND liegt bei ca. 3.6 Hz für eine Frequenz unter 500 Hz, darüber 7% der Signalfrequenz
- **Lautheit:** Skala der subjektiv empfundenen Lautstärke in Sone, dabei ist zunächst 1 Sone definiert als 1 kHz mit 40 dB (SPL); ein Sone ist dann ein Maß für die subjektiv empfundene Verdopplung der Lautstärke. Dabei entspricht eine Verzehnfachung des SPL einer Verdopplung der empfundenen Lautstärke:

$$\pm 3 \text{ dB[Sone]} \hat{=} \pm 10 \text{ dB[SPL]}$$

- **Frequenzmaskierung und Zeitmaskierung:** *siehe Folien*

3 Psychooptische Wahrnehmung

3.1 Physikalische Grundlagen

Das *periphere Auge* besteht aus der *Cornea (Hornhaut)* mit festen ≈ 43 Dioptrien (dabei ist $1 \text{ Dioptr} \hat{=} \text{m}^{-1}$), der *Iris (Blende)*, der *Linse* mit variablem Fokus von 20 bis 30 Dioptrien und der *Retina (Sensor)*:

3.2 Physiologisches Modell des Sehens

Die Lichtstärke einer monochromatischen Quelle von $\lambda = 555\text{nm}$ mit Strahlstärke von $\frac{1}{683} \frac{\text{W}}{\text{sr}}$ wird empfunden als ein *Candela* (1 cd). Wieder gibt es Wahrnehmungsschwellen:

- **Kontrast:** Gegeben seien zwei Strahlungsstärken I_0 und I_1 , betrachte wieder der Abstand zwischen zwei verschiedenen Strahlungsstärken, die gerade noch als unterschiedlich wahrgenommen werden:

$$\frac{I_1 - I_0}{I_0} = \frac{\Delta I}{I_0}$$

Die Kontrastwahrnehmung entspricht nun dem *Weberschen „Gesetz“*:

Bei konstanter Adaption des Auges kann der Mensch gleichzeitig ca. 250 Kontraststufen unterscheiden

Tristimulus-Experiment: Man generiert eine Referenzfarbe aus einem Prisma, d.h. wirkliche Spektralreihen mit Hilfe von Prismen und Filtern. Der Teilnehmer des Experiments versucht dann, die gleiche Farbe aus drei Lampen ($P_1 = \text{rot}$, $P_2 = \text{grün}$ und $P_3 = \text{blau}$) zu mischen, d.h. er mischt $C(\lambda) = m_1 \cdot P_1 + m_2 \cdot P_2 + m_3 \cdot P_3$.

Ergebnis ist jedoch: Es ist nicht immer möglich, die gesuchte Farbe zu mischen: Farben zwischen blau und grün sind z.T. nicht reproduzierbar! Dies gleich man – in der technischen Überlagerungstheorie – aus, indem man Gewichte im Bereich $[-1, 1]$ erlaubt. D.h. die Farbe, die erzeugt wird, wenn das Gewicht der Farbe x negativ ansetzt, wird bei einem RGB-Monitor genauso aussehen wie die originale Referenzfarbe plus ein entsprechender Anteil der Farbe x .

3.3 Psychooptisches Modell des Sehens

4 Repräsentation und Codierung von Signalen

Sei s_i ein Zeichen eines Alphabets $\{s_1, \dots, s_n\}$ mit Auftretenswahrscheinlichkeit p_i – dann ist $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Seien zunächst alle Symbole gleichwahrscheinlich – dies ist der Maximalfall, da keine Information vorher bekannt ist. Dann ist $p_i = n^{-1}$, und n Symbole lassen sich kodieren mit $N = 2^k$ Zuständen. Damit braucht man pro Symbol für die Kodierung k bits:

$$k = \log_2 N = -\log_2 p_i$$

Im allgemeinen Fall ist $k_i = -p_i \log_2 p_i$, dies addiert sich zum **Entscheidungsgehalt (Entropie)**:

$$H := -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i [\text{Bit}]$$

BEISPIEL: Gegeben sei ein Alphabet $\{s_0, s_1\}$ mit $p_1 = 1 - p_0$. Dann ist

$$H = -(p_0 \log_2 p_0 + (1 - p_0) \cdot \log_2(1 - p_0))$$

Damit ergibt sich folgende Entropie in Abhängigkeit von p_0 :
Die Entropie eines p -adischen Codes:

$$H_p = -\sum_{i=1}^n p_i \log_b p_i = -\frac{1}{\log b} \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

Die **mittlere Codelänge** ergibt sich daraus als

$$L_z = \sum_{i=1}^n p_i l_i \text{ mit } l_i = |w_i|$$

Um die theoretische Größe Entropie und den praktischen Wert mittlere Codelänge in Beziehung zu setzen, verwendet man die **Redundanz**

$$R = L_z - H \text{ mit } 0 \leq R < 1$$

Das **Shannonsche Codierungstheorem** besagt:

1. $H \leq L_z < H + 1$
2. R kann durch geeignete Wahl des Codes beliebig klein gemacht werden.

BEISPIEL: Betrachte eine ternären Quelle mit $p_i = \frac{1}{3}$:

$$H_3 = - \sum_{i=1}^3 p_i \log_3 p_i = - \sum_{i=1}^3 \log_3 \frac{1}{3} = 1 \text{Bit}_3$$

Weiter ist $L_z = 1$ und damit $R = 0$. Sollten diese drei Zustände mit einer binären Quelle kodiert werden, so ergibt sich:

$$H_2 = - \sum_{i=1}^3 p_i \log_2 p_i = - \sum_{i=1}^3 \log_2 \frac{1}{3} = 1.582 \text{Bit}_2$$

Damit ergibt sich $L_z = \frac{1}{3}(1 + 2 + 2) = 1.\bar{6} \text{Bit}_2$, also eine Redundanz von 0.0846Bit_2 .

folgt noch

5 Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Was wird bei der digitalen Signalverarbeitung benötigt? Als Beispiel dienen Schallwellen:

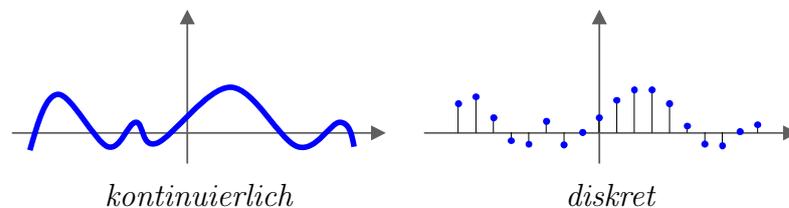
1. Ein kontinuierliches physikalisches Signal (Schall, Licht) trifft auf einen *Signalwandler* (Micro, Kamera) mit linearer Kennlinie.
2. Das Signal wird im *A/D-Wandler* abgetastet und quantisiert (*Diskretisierung*).
3. Das Signal wird diskret (digital) weiterverarbeitet.
4. Im *D/A-Wandler* muß das Signal *rekonstruiert* werden (kontinuierliches Signal bei Schall) oder es erfolgt Resampling (Monitor-Raster, Laser-Drucker bei Bildern).

5.1 Signale und Systeme

5.1.1 Grundlagen und Klassifikation von Signalen

- Man unterscheidet *kontinuierliche* Signale $f(t)$, $f(x)$, $f(x, y)$ etc. und *diskrete* Signale $f[n]$, $f[n, m]$, $f[u, v]$ (mit $n, m, u, v \in \mathbb{N}$) etc.

Diskrete Signale haben eine konstante Differenz T zwischen den Abtastpunkten, wobei jeweils gilt: $f[n] \hat{=} f(n \cdot T)$.



- Bei *geraden* Signalen ist $f(x) = f(-x)$, bei *ungeraden* Signalen $f(x) = -f(-x)$.
- *Periodische* Signale sind Signale, für die $f(x + k \cdot T) = f(x)$ gilt für eine feste Periode T ; *aperiodische* Signale sind entsprechend nicht periodisch.
- *Aperiodisch endlich* oder *kompakte* Signale sind nur innerhalb eines Intervalls $[T_{min}, T_{max}]$ bestimmt, außerhalb sind sie gleich 0.

- Ein kompaktes Signal läßt sich *periodisch wiederholen*:

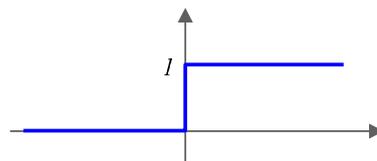
$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + k \cdot T)$$

Falls dabei $T := T_{max} - T_{min}$ größer als T ist, so kommt es zu *Aliasing*, d.h. Überlagerung des Signals einer Periode mit dem Signal der nächsten Periode.

5.1.2 Elementarsignale und deren Transformation

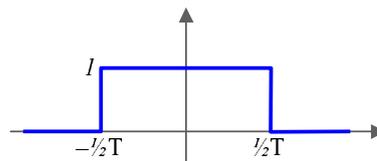
Zunächst einige Elementarsignale:

- Die *Sprungfunktion* (der *Einheitssprung*) ist definiert als



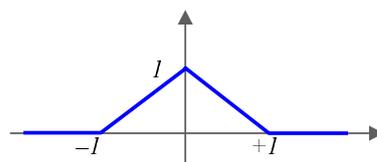
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

- Das *Rechtecksignal* ist folgendermaßen definiert:



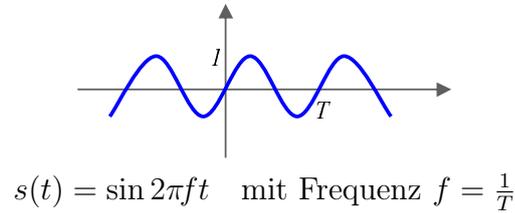
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Der *Dreiecksimpuls* ist:

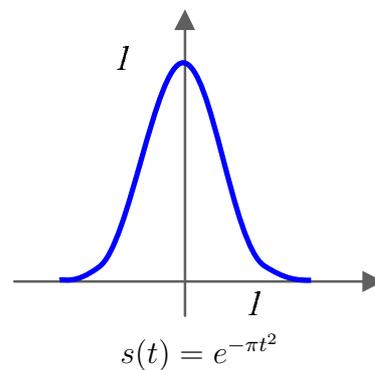


$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{falls } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Das *Sinus-Signal* ist definiert durch



- Das *Gaußsignal* ist:



5.1.3 Transformation von Signalen

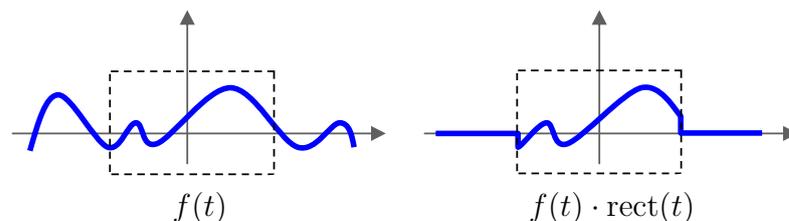
- Ein Signal kann folgendermaßen transformiert werden:

$$s^*(t) = a \cdot s\left(\frac{t - t_0}{T}\right) \text{ mit } T \neq 0$$

Beispielsweise ist ein um t_0 verschobener, mit a und T skaliertes Rechtecksimpuls gegeben durch

$$a \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

- Ein normales Signal kann z.B. mit einem Rechtecksignal multipliziert werden, dadurch wird ein Stück „herausgeschnitten“ aus dem Originalsignal:



5.1.4 Der Dirac-Impuls

Betrachte folgenden Limes:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{T} \operatorname{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \right)$$

Dieser Limes existiert formal nicht als Funktion (nur als Distribution), daher definiert man den *Dirac-Impuls* folgendermaßen:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 & \end{cases}$$

Dann gilt die *Siebeigenschaft* des Dirac-Impulses:

$$\int \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0)$$

Durch Verschiebung des Dirac-Impulses läßt sich eine Abtastung modellieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t_0 - \tau) d\tau = f(t_0)$$

Somit kann f „alternativ definiert werden“ durch:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Die Abtastung mit Dirac-Impulsen zerlegt also das Signal in ein Orthogonalsystem von einzelnen Funktionen (mit Basissystem $\langle \delta(t - \tau) \rangle_{t \in \mathbb{R}}$ und Gewichten $f(t)$), die zusammenaddiert wiederum das ursprüngliche Signal ergeben.

Im **Diskreten** ist der *Einheitsimpuls* entsprechend zum Dirac-Impuls definiert als:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$

Analog ist die Zerlegung einer diskreten Funktion in eine diskrete Überlagerung möglich:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \cdot \delta[n - k]$$

Weiter ist der *Impulskamm* (für den diskreten und nicht diskreten Fall) definiert als:

$$\begin{aligned} \text{III}_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T) \\ \text{III}_T[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - k \cdot T] \end{aligned}$$

5.1.5 Grundlagen und Klassifikation von Systemen

Ein System \mathcal{L} kann ein Signal verändern, modelliert durch $\mathcal{L}\{f(x)\} = g(x)$. Vorkommen kann eine Veränderung der zeitlichen oder örtlichen Ausdehnung sowie der Amplitude (beispielsweise verändert die Geometrie und Reflektion eines Saales den Schall in Form von Hall).

Zur Charakterisierung dieser Veränderungen:

- Für ein *lineares* System gilt zum einen *Superposition* ($\mathcal{L}\{f_1(x) + f_2(x)\} = \mathcal{L}\{f_1(x)\} + \mathcal{L}\{f_2(x)\}$), zum anderen *Skalierung* ($\mathcal{L}\{a \cdot f(x)\} = a \cdot \mathcal{L}\{f(x)\}$), zusammen:

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathcal{L}\{f_i(t)\}$$

- *Zeitinvarianz* bedeutet, daß die Systemantwort eines Systems \mathcal{L} unabhängig ist vom Zeitpunkt der Operation: Sei ein Eingangssignal $v_1(t)$ gegeben, und sei $y_1(t) = \mathcal{L}\{v_1(t)\}$. Dann muß für ein zweites Signal $v_2(t) = v_1(t - \tau)$ bei einem festen τ gelten:

$$y_2(t) = \mathcal{L}\{v_2(t)\} \stackrel{!}{=} \mathcal{L}\{v_1(t - \tau)\} = y_1(t - \tau)$$

5.2 *Einschub*: Komplexe Zahlen

Polarkoordinaten: Sei $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann läßt sich z darstellen als (a, φ) mit

$$a = |z| = \sqrt{\Re^2(z) + \Im^2(z)} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \frac{\Im(z)}{\Re(z)}$$

Zeigerdarstellung:

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} \quad \text{und} \quad e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$$

Weiter gelten folgende Gleichungen für Sinus und Cosinus:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} &= e \cdot \cos \varphi \\ e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} &= 2j \sin \varphi \end{aligned}$$

BEISPIEL: Betrachte einen Masse-Feder-Schwinger. Sei $s(t)$ der Weg, der dem Cosinus entspreche. Die Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ entspricht dann dem Sinus. Die potentielle Energie ist $E_p = \frac{1}{2}ks^2(t)$, die kinetische $E_k = \frac{1}{2}m\dot{s}^2(t)$; insgesamt ist die Energie also

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}ks^2(t) + \frac{1}{2}m\dot{s}^2(t)$$

Setzt man nun $\omega^2 = \frac{k}{m}$ und ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, so gilt:

$$s^2(t) + \frac{1}{\omega^2}\dot{s}^2(t) = A^2$$

Dies entspricht einer Kreisgleichung in der komplexen Ebene. Entsprechend werden komplexe Signale dargestellt durch

$$s_c(t) = A \cdot e^{j(2\pi ft + \varphi_0)} = A \cdot (\cos(2\pi ft + \varphi_0) + j \sin(2\pi ft + \varphi_0))$$

Dabei ist der Cosinus-Anteil der sogenannte *gerade* Anteil, der Sinus-Anteil der *ungerade*.

5.3 Faltung

5.3.1 Kontinuierliche Faltung

Ein Signal $s(t)$ kann durch gewichtete und verschobene $\delta(t - t_0)$ -Impulse dargestellt werden:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$

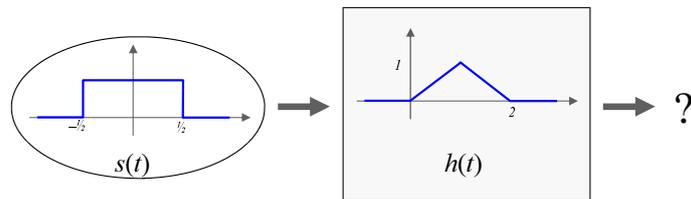
Liegt nur ein approximiertes Signal vor (diskretisiert mit Periode T_0), etwa

$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_0) \cdot g(t - nT_0) \cdot T_0,$$

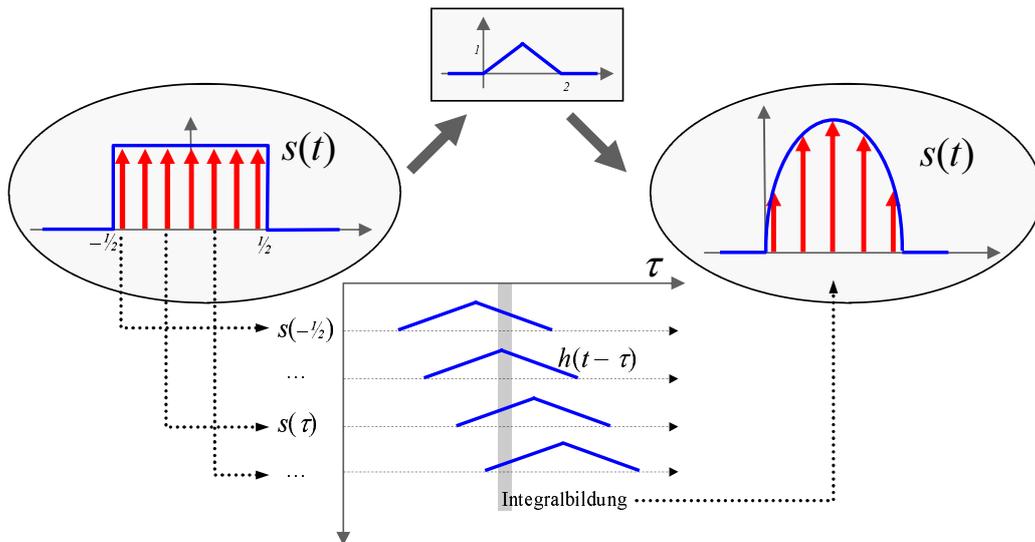
Betrachte nun $T_0 \rightarrow 0$. Dann geht $T_0 \rightarrow d\tau$, somit auch $s_a(t) \rightarrow s(t)$, und $g(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$. Es liegt dann folgendes *Faltungsintegral* vor:

$$s_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

BEISPIEL: Sei ein Eingangssignal $s(t) = \text{rect}(t)$ gegeben. Sei ein System vorhanden, das $\delta(t)$ transformiert zu $h(t) = \Lambda(t - 1)$:



Dann gilt:



Damit ist

$$s_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \Lambda(t - 1) dt$$

Das approximierte Signal ist damit ein Teil eines Sinus-Signals.

BEISPIEL 2: Sei nun $h(t) = \frac{1}{T} \varepsilon(t) e^{-\frac{t}{T}}$. Sei das Eingangssignal

$$s(t) = a \cdot \text{rect} \left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0} \right) = \begin{cases} a & \text{falls } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 && \text{für } t < 0 \\ g(t) &= \int_0^t \frac{a}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau = a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) && \text{für } 0 \leq t \leq T_0 \\ g(t) &= \int_0^t \frac{a}{T} e^{-\frac{t-\tau}{T}} d\tau = a \cdot \left(e^{\frac{T}{T_0}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} && \text{für } t > T_0 \end{aligned}$$

Zusammengefaßt: Liegt ein Eingangssignal $s(t) = \int s(\tau)\delta(t-\tau) d\tau$ vor und ein lineares System mit \mathcal{L} , für das $\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$ gilt, dann ist das Ausgangssignal gleich:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{s(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\int s(\tau)\delta(t-\tau) d\tau\right\} \\ &= \int s(\tau)\underbrace{\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\}}_{h(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Damit läßt sich die Reaktion eines Systemes zurückführen auf die Systemantwort auf den Dirac-Impuls.

5.3.2 Diskrete Faltung

Analog zur kontinuierlichen Faltung ergibt sich die diskrete Faltung: ein System \mathcal{L} erzeugt aus einem Eingangssignal $s[n]$ eine Ausgabe $g[n]$.

Charakterisiert wird ein System durch $h[n] = \mathcal{L}\{\delta[n]\}$. Das System ist verschiebungsinvariant, d.h. es gilt $\mathcal{L}\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$.

Liegt nun ein Signal $s[n]$ an, so läßt sich diese wieder beschreiben durch:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cdot \delta[n-k]$$

Das lineare System läßt sich nun in die Summe hereinziehen:

$$g[n] = \mathcal{L}\{s[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{\delta[n-k]\}}_{h[n-k]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cdot h[n-k]$$

BEISPIEL: *Diskrete Filterung.* Sei ein Eingangssignal $s[n]$ gegeben. Eine Filterung erfolgt mit einem *Filterkern*:

$$h[n] = e^{-\frac{n^2}{\sigma^2}} \cdot \text{rect}\left(\frac{n}{W}\right)$$

Das Ergebnis des Filters soll sein:

$$\begin{aligned}
 g[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cdot h[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot s[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} e^{-\frac{k^2}{\sigma^2}} \cdot s[n-k]
 \end{aligned}$$

Liegt beispielsweise eine Gaußkurve an, so ergibt sich nach der Filterung:



5.3.3 Die Faltungsalgebra

Man schreibt für die Faltung auch folgendermaßen:

$$g(t) = \int s(\tau)h(t-\tau) d\tau = s(t) * h(t)$$

Die Faltung bildet eine *Faltungsalgebra*:

- Eins-Element ist der Dirac-Impuls: $s(t) * \delta(t) = s(t)$.
- kommutativ: $s(t) * h(t) = h(t) * s(t)$
- assoziativ: $(f(t) * h(t)) * s(t) = f(t) * (h(t) * s(t))$
- distributiv: $f(t) * (s(t) + h(t)) = (f(t) * s(t)) + (f(t) * h(t))$
- weiter gilt: $s(t) * \delta(t - t_0) = s(t - t_0)$.

BEWEIS zur Kommutativität: Es gilt (mit Substitution $\tau \rightarrow t - \vartheta$):

$$\begin{aligned}
 s(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)h(t-\tau) d\tau \\
 &= \int_{+\infty}^{-\infty} s(t-\vartheta)h(\vartheta) \cdot (-1) d\vartheta \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\vartheta)s(t-\vartheta) d\vartheta
 \end{aligned}$$

5.4 Fourier-Transformation

5.4.1 Motivation

Sei ein Signal $s(t)$ gegeben mit

$$s(t) = e^{j2\pi ft} = \cos 2\pi ft + j \sin 2\pi ft$$

Die Ausgabe des Systems sei:

$$\begin{aligned} g(t) &= s(t) * h(t) \\ &= \int h(\tau) e^{j2\pi f(t-\tau)} d\tau \\ &= \int h(\tau) e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= e^{j2\pi ft} \cdot \underbrace{\int h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{:=H(f)} \\ &= s(t) \cdot H(f) \end{aligned}$$

Dabei ist $H(f)$ eine komplexwertige Funktion, die eine transformierte Form von $h(t)$ darstellt. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß $H(f)$ nur einmal berechnet werden muß und sich die Summe dann zu einem (komplexen) Produkt vereinfacht. Können wir also ein allgemeines Eingangssignal $s(t)$ in Exponentialbasisfunktionen zerlegen, so kann die Faltung durch einfache Multiplikation ersetzt werden.

BEISPIEL: Definiere eine Funktion

$$s_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{falls } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

und definiere die periodische Wiederholung $s(t)$. Wir approximieren nun diese Funktion – dazu definieren wir ein Fehlersignal für eine gegebene Approximation $s_i(t)$ durch

$$e(t) = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t) - s_i(t)|^2 dt$$

Der Fehler $e(t)$ soll minimiert werden.

0. Approximation: $s_0(t) = 0.5$

1. Approximation: $s_1(t) = s_0 + a_1 \sin \omega_0 t$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ und Amplitude

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(\omega_0 t) dt$$

2. Approximation: $s_3(t) = s_1 + a_3 \sin 3\omega_0 t$ mit Amplitude

$$a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(3\omega_0 t) dt$$

∞ . Approximation: $s(t) = s_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\omega_0 t$ mit Amplituden

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

Trägt man die Spektrallinien a_k über der Frequenz als Spektrum auf, so ergibt sich $a_k \sim \frac{1}{f_i}$, zudem ist das Spektrum spiegelsymmetrisch zur 0-Achse.

5.4.2 periodische Signale

Jede periodische Funktion (mit Periode $T_0 = \frac{1}{f_0}$) kann durch Überlagerung von gewichteten Fourierbasisfunktionen dargestellt werden:

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \quad (\text{Synthesegleichung})$$

Die Gewichte c_k (*Spektrallinien*) werden dabei berechnet durch

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^T s_p(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt \quad (\text{Analysegleichung})$$

Periodische Signale erzeugen hierbei *diskrete Spektrallinien!*

5.4.3 aperiodische Signale

Für den Übergang zu aperiodischen Signalen sei nun eine aperiodische Funktion $s(t)$ gegeben, die im Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ definiert ist; sonst sei sie null. Daraus ergebe sich $s_p(t)$, periodisch in der Periode $T_0 = T + \varepsilon$ mit

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t + nT_0)$$

Die Fourier-Approximation ergibt sich jetzt (mit $T_0 = \frac{1}{f_0}$) als:

$$c_k = f_0 \cdot \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_p(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt}_{=: S(kf_0)}$$

Daraus erhält man:

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kf_0) \cdot e^{jk2\pi f_0 t} \cdot f_0$$

Wenn nun der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\sum \rightarrow \int$ gemacht wird, so wird $T_0 \rightarrow \infty$, weiter $f_0 \rightarrow df$ und $k \cdot f_0 = f$:

$$s_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df$$

Durch den Grenzübergang verringert sich der Abstand der Spektrallinien zu null, d.h. das Spektrum wird eine kontinuierliche Funktion. Man erhält hier also eine Darstellung des Originalsignals durch eine gewichtete Überlagerung von Exponentialfunktionen, wobei die Gewichte eine Transformation des ursprünglichen Signals darstellen. Als Schreibweise symbolisiert man durch $s(t) \circ \longrightarrow \bullet S(f)$ die Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich.

Oft verwendet man auch die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \int s(t) e^{-j\omega t} dt & \bullet \longrightarrow \circ & s(t) = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ S(f) &= \int s(t) e^{-j2\pi f t} dt & \bullet \longrightarrow \circ & s(t) = \int S(f) e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

BEISPIEL: Transformiere den Exponentialimpuls $s(t) = \varepsilon(t) \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ mittels Fouriertransformation (mit $\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at}$):

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{T} + j2\pi f)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{-T}{1 + j2\pi f T} e^{-(\frac{1}{T} + j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{-1}{1 + j2\pi f T} (e^{-\infty} - e^0) \\ &= \frac{1}{1 + j2\pi f T} \\ &= \frac{1}{1 + (2\pi f T)^2} - j \cdot \frac{2\pi f T}{1 + (2\pi f T)^2} \end{aligned}$$

In Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} S(f) &= |S(f)| \cdot e^{j\phi(f)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi f T)^2}} \cdot e^{-j \arctan(2\pi f T)} \end{aligned}$$

5.4.4 Zusammenfassung

Transformiere vom Zeit- in den Frequenzbereich (*Fourier-Transformation*):

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformiere dazu invers vom Frequenzbereich in den Zeitbereich (*inverse Fourier-Transformation*):

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} dt$$

Zur Unterscheidung zwischen periodischen und aperiodischen Signalen:

- Wenn $s(t)$ periodisch und kontinuierlich ist, dann ist $S(f)$ aperiodisch und diskret (*Fourier-Reihendarstellung*).
- Wenn $s(t)$ aperiodisch und kontinuierlich ist, dann ist $S(f)$ aperiodisch und kontinuierlich (*Fourier-Transformation*).

Ich habe das konsequente Anfertigen einer Mitschrift der Vorlesung an dieser Stelle abgebrochen, da es für mich nicht mehr mit vertretbarem Aufwand möglich war. Weitere Teile der Vorlesung stehen als unkompilierbarer L^AT_EX-Quelltext zur Verfügung.